

N° d'Ordre : 3 (1972)

Référence C.N.R.S. : A06814

THESE

présentée devant l'**UNIVERSITE de NANTES**

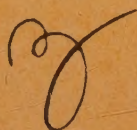
pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Daniel SARLAT

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



COMMANDE ET FILTRAGE OPTIMAUX PAR « IMMERSION INVARIANTE »

Soutenue le 24 mars 1972 devant la Commission d'Examen

M. MEZENCEV Président

M. LE CORRE

M. VIDAL

M. de LARMINAT

M. THOMAS

Examineurs

THESE

présentée devant l'UNIVERSITE de NANTES

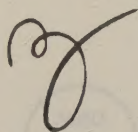
pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Daniel SARLAT

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



COMMANDE ET FILTRAGE OPTIMAUX PAR « IMMERSION INVARIANTE »

Soutenue le 24 mars 1972 devant la Commission d'Examen

M. MEZENECV Président

M. LE CORRE

M. VIDAL

M. de LARMINAT

M. THOMAS

} Examinateurs

THESE

DOCTEUR-INGENIEUR

Daniel SABLAT



UNIV. LEIDEN
BIBL.
1914
1915
1916
1917
1918
1919
1920
1921
1922
1923
1924
1925
1926
1927
1928
1929
1930
1931
1932
1933
1934
1935
1936
1937
1938
1939
1940
1941
1942
1943
1944
1945
1946
1947
1948
1949
1950
1951
1952
1953
1954
1955
1956
1957
1958
1959
1960
1961
1962
1963
1964
1965
1966
1967
1968
1969
1970
1971
1972
1973
1974
1975
1976
1977
1978
1979
1980
1981
1982
1983
1984
1985
1986
1987
1988
1989
1990
1991
1992
1993
1994
1995
1996
1997
1998
1999
2000
2001
2002
2003
2004
2005
2006
2007
2008
2009
2010
2011
2012
2013
2014
2015
2016
2017
2018
2019
2020
2021
2022
2023
2024
2025

UNIVERSITE DE NANTES

Président M. KERNEIS Médecine
Vice-Président M. PETRESCO Mathématiques

LISTE DES ENSEIGNANTS DES DISCIPLINES SCIENTIFIQUES

Professeurs

M. BRILLOUET
M. PAUC
M. PETRESCO
M. RAFFIN
M. VIVIER (EN SM)

Mathématiques

"
"
"
"

M. TARDY (EN SM)
M. RAVILLY (EN SM)

Mécanique

"

M. AVIGNON
M. BOULLLOUD
M. COLLET
M. MINN
M. MEZENECV (EN SM)
M. MOUTON

Physique

"
"
"
"
"
"

M. DUNOYER
M. GRAFF
M. MARTIN
M. PIERI
M. QUINIOU
M. ROUXEL
M. WOJTKOWIAK

Chimie

"
"
"
"
"
"

Melle DEBRAUX
M. GARRIGUES
Mme LE DOUARIN
M. LE DOUARIN
M. SELLIER

Biologie

"
"
"

M. CAVET

Sciences de la Terre

Professeurs associés

M. BRARD (EN SM)
M. ABKOWITZ (EN SM)

Mécanique

Mécanique

Professeurs sans chaire	M. BARDON	Physique
	M. GOUREAUX	"
	M. LASKAR	"
	Melle OFFRET (EN SM)	"
	M. GOBIN (EN SM)	Chimie
	M. TOURNOUX	"
	M. DUPONT	Biologie
	M. SAUDRAY	"
	M. OTTMANN	Sciences de la Terre
Maîtres de Conférences	M. BETTEN	Mathématiques
	M. FOUQUES	"
	M. GATESOUBE	"
	M. GAPAILLARD (Chargé d'enseignement)	"
	M. IBISCH	"
	M. LAMEAU (EN SM)	"
	M. LEBORGNE	"
	M. PHAN-THE-LAI (Chargé d'Enseignement)	"
	M. DUBIGEON (Chargé d'Enseignement EN SM)	Mécanique
	M. GUEVEL (EN SM)	"
	M. SULMONT (EN SM)	"
	M. VILAINE (EN SM)	"
	M. CAILLER (IUT)	Physique
	M. LE BIHAN	"
	M. LE CORRE (IUT)	"
	M. LE MAITRE	"
	M. LONCKE	"
	M. ROSIER	"
	M. THOMAS (Chargé d'Enseignement IUT)	"
	M. BOUCHY (IUT)	Chimie
	M. CHABANEL	"
	M. LE MAITRE (Chargé d'Enseignement IUT)	"
	Mme MARTIN	"
	M. POINTEAU (EN SM)	"
	M. AMOURIQ	Biologie
	M. LEBRUN	"
	Mme NICOLAS-PRATT	"
Maitres de Conférences	M. FORESTIER	Sciences de la Terre
	M. NICOLAS	"

A mes parents,

A mes parents,

A ma femme

Le travail que nous présentons a été réalisé au Laboratoire d'Automatique de l'E.N.S.M., dirigé par Monsieur le Professeur MEZENCEV. Nous tenons à lui exprimer toute notre reconnaissance pour l'accueil qu'il nous a réservé au sein de son équipe de chercheurs et lui faire part de notre gratitude.

Monsieur J.F. LE CORRE nous a accueilli parmi l'équipe d'enseignants du Département de Génie Electrique de l'I.U.T. et a toujours oeuvré pour nous accorder le maximum de disponibilité pour nos travaux de recherche. Aujourd'hui, il nous fait l'honneur de participer à notre jury. Nous lui exprimons toute notre reconnaissance.

Notre travail a été placé sous la direction de Monsieur Y. THOMAS. Sa collaboration compétente, la valeur de ses conseils, sa bienveillante attention, ont constitué le guide précieux qui nous a permis de mener à bien notre étude. Qu'il trouve là le témoignage particulier de notre profonde gratitude.

Nous n'oublierons pas la part déterminante qu'à prise Monsieur Ph. DE LARMINAT dans l'orientation et la conclusion de nos recherches, ni les conseils qu'il nous a prodigués à tout moment. Nous l'en remercions très chaleureusement.

Nous voudrions dire également combien nous sommes sensibles à l'honneur que nous fait Monsieur le Professeur VIDAL en acceptant de juger ce travail.

Enfin, nos plus vifs remerciements s'adressent à tous ceux qui ont collaboré à notre travail : nos collègues chercheurs, le personnel technique du Laboratoire et, en particulier, Monsieur A. BERTHONNEAU.

S O M M A I R E

	<i>Pages</i>
INTRODUCTION -	1
La notion d'immersion	1
La notion d'invariance	2
Problèmes de commande	3
Problèmes de filtrage	4
 Chapitre I - PRINCIPALES METHODES MISES EN OEUVRE DANS UNE APPROCHE PAR IMMERSION INVARIANTE : APPLICATION A LA COMMANDE ET AU FIL- TRAGE OPTIMAL -	 7
1 - INTRODUCTION	7
2 - PROBLEME A VALEURS LIMITEES EN DEUX POINTS : UNE APPROCHE PAR IMMERSION INVARIANTE	8
2,1 - Exposé du problème	8
2,2 - Nouvelle formulation - Obtention de la condition initiale manquante	8
2,3 - Expression des solutions en x et g en fonction de $r(a,c)$	10
2,31 - Obtention d'un nouveau système de CAUCHY	10
2,32 - Validation des équations	12
2,4 - Conclusion	14
3 - AUTRES TECHNIQUES POUR OBTENIR LES EQUATIONS D'UN SYSTEME DE CAUCHY DANS UNE APPROCHE PAR IMMERSION INVARIANTE	17
3,1 - Système linéaire non stationnaire - méthode de dérivation	17
3,2 - Méthode des perturbations	20
4 - QUELQUES ASPECTS DES PROBLEMES DE CALCUL NUMERIQUE	24
5 - UN PROBLEME DE CONTROLE OPTIMAL : IMMERSION INVARIANTE ET PROGRAMMATION DYNAMIQUE	25
5,1 - Cas continu	25
5,2 - Cas discret	29
5,3 - Conclusion	31
6 - ESTIMATION D'ETAT PAR IMMERSION INVARIANTE	31
6,1 - Introduction	31
6,2 - Estimation d'un état en présence d'une incertitude sur la mesure	33

6,21 - Exposé du problème	33
6,22 - Nouvelle formulation du problème	33
6,23 - Valeur optimale de l'estimation	35
6,24 - Equation de fonction $p(a)$	36
6,25 - Conclusion	37
6,3 - Estimation d'état en présence d'incertitude sur la mesure et sur la représentation du système	37
6,31 - Exposé du problème	37
6,32 - Principe de la résolution	38
6,33 - Le problème de calcul des variations équivalent	38
6,34 - L'approche par Immersion Invariante	39
6,35 - Les équations de filtrage	40
6,36 - Conclusion	41
6,37 - Application sur un exemple	42
6,4 - Conclusion	43

Chapitre II - CONTRIBUTION A L'ETUDE DE PROBLEMES DE COMMANDE CLASSIQUES - 45

1 - INTRODUCTION	45
1,1 - Aspect théorique	45
1,2 - Aspect pratique	45
2 - COMMANDE MULTIVARIABLE CONTRAINTE	46
2,1 - Introduction	46
2,2 - Les équations par Immersion Invariante	47
2,3 - Validation de ces équations	49
2,4 - Les équations dans le cas discret	56
3 - CAS DES SYSTEMES LINEAIRES NON CONTRAINTS MUNIS DE CRITERE QUADRATIQUE	58
3,1 - Introduction	58
3,2 - Optimisation quadratique d'un système linéaire non contraint	58
3,21 - Cas continu	58
3,22 - Cas discret	63
3,3 - Une application élémentaire	65
4 - UNE STRATEGIE D'OPTIMALISATION POUR LES SYSTEMES MONOVARIABLES, MUNIS D'UN CRITERE QUADRATIQUE AVEC BUTEE SUR LA COMMANDE	66
4,1 - Introduction	66
4,2 - Traitement analytique d'un exemple élémentaire	67
4,3 - Recherche d'une stratégie	71
4,4 - Généralisation aux systèmes monovariabiles d'ordre n	73

5 - MISE EN OEUVRE PRATIQUE	75
5,1 - Introduction	75
5,2 - Systèmes linéaires non contraints	76
5,21 - Cas général	76
5,22 - Algorithme simplifié	80
5,3 - Systèmes linéaires avec butées sur le vecteur de commande	84
5,31 - Cas général	86
5,32 - Algorithme simplifié	86
5,4 - Conclusion	90
6 - CONCLUSION	91

Chapitre III - FILTRAGE ET COMMANDE OPTIMALE SELON UN CRITERE A HORIZON FUYANT -	93
--	----

A - ESTIMATION D'ETAT -	94
-------------------------	----

I - INTRODUCTION - DEFINITION D'UNE ESTIMATION OPTIMALE	94
---	----

2 - LES EQUATIONS DU FILTRE	96
-----------------------------	----

2,1 - Approche par Immersion Invariante	96
---	----

2,2 - Valeur optimale de l'estimation	98
---------------------------------------	----

2,3 - Equation différentielle de la matrice "poids"	99
---	----

2,4 - Conclusion	100
------------------	-----

3 - ETUDE DE LA "MATRICE POIDS $P(a)$ "	101
---	-----

3,1 - Etude en régime transitoire	101
-----------------------------------	-----

3,11 - Conventions et notations	101
---------------------------------	-----

3,12 - Existence d'une solution générale $P(a)$	102
---	-----

3,13 - Unicité de la solution $P(a)$	104
--------------------------------------	-----

3,14 - Propriétés de la solution $P(a)$	104
---	-----

3,15 - Conclusion	106
-------------------	-----

3,2 - Etude du régime permanent de l'équation (16)	107
--	-----

3,21 - Etude d'un exemple élémentaire	108
---------------------------------------	-----

3,22 - Existence d'une limite de $P(a)$ autre que $P = 0$	110
---	-----

3,23 - Forme générale des solutions stationnaires P^*	111
---	-----

3,24 - Condition pour que P^* soit définie positive symétrique	114
--	-----

3,25 - Construction de la solution permanente définie positive	115
--	-----

3,26 - Stabilité de la solution permanente définie positive	117
---	-----

3,27 - Rappels de l'ensemble des propriétés de P^*	119
--	-----

4 - STABILITE DU FILTRE	120
5 - CHOIX DU COEFFICIENT α	121
5,2 - Un exemple élémentaire	123
6 - CONCLUSION	125
7 - MISE EN OEUVRE PRATIQUE	127
7,1 - Définition du problème	127
7,2 - La mise en équation	127
7,3 - Calcul du filtre stationnaire	128
7,4 - Mise en oeuvre du filtre stationnaire	128
7,5 - Conclusion	129
 B - COMMANDE OPTIMALE -	 132
1 - INTRODUCTION	132
2 - DEFINITION DE LA COMMANDE OPTIMALE DUALE DE L'ESTIMATION	132
2,1 - Dualité directe	132
2,2 - Mise en équation définitive	133
2,3 - Obtention de la commande	134
3 - DETERMINATION DES ALGORITHMES	134
3,1 - Introduction	134
3,2 - Problème sans contrainte	136
3,3 - Les algorithmes définitifs	137
4 - OBTENTION D'UN REGULATEUR	138
4,1 - Expression de la commande	138
4,2 - Mise en oeuvre du régulateur	139
4,3 - Un exemple élémentaire	140
5 - CHOIX DU COEFFICIENT α POUR LE REGULATEUR	143
5,1 - Système du premier ordre	143
5,2 - Système du second ordre	144
5,3 - Système d'ordre plus élevé	147
6 - MISE EN OEUVRE PRATIQUE	148
6,1 - Système monovariable du second ordre	148
6,2 - Système du 3 ^e ordre	151
6,3 - Système multivariable	153
7 - CONCLUSION	155
 C - CONCLUSION -	 160
CONCLUSION	163

COMMANDE ET FILTRAGE OPTIMAUX
PAR "IMMERSION INVARIANTE"

INTRODUCTION -

Beaucoup plus qu'une méthode propre, l'Immersion Invariante est un principe général, dont BELLMAN, KALABA ... ont étendu le champ d'action à des domaines très divers de la physique mathématique et des mathématiques : diffusion des neutrons - propagation des ondes - (recherche des valeurs propres de systèmes linéaires - équations intégrales de FREDHOLM - problèmes à valeurs limites en deux points) - filtrage non linéaire et commande optimale.

Cependant, comme la traduction que nous donnons : "Immersion Invariante" ne paraît guère plus explicite que le terme anglosaxon "Invariant Imbedding", il nous paraît opportun d'en donner d'emblée une signification. Pour cela, nous nous appuierons sur un exemple :

Considérons donc le système d'équations différentielles, donné sous forme vectorielle, suivant :

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{g}(\underline{x}) \quad \underline{x}(0) = \underline{c} \quad (1)$$

où $\underline{x}$ représente un vecteur de dimension n , fonction de t

$\underline{g}(\underline{x})$ un vecteur de même dimension, fonction de $\underline{x}$, et où le vecteur $\underline{c}$ représente l'état initial du système.

De plus, nous admettrons que $\underline{g}(\underline{x})$ satisfait des conditions (LIPSCHITZ) telles que le système (1) admet une solution unique pour $t \geq 0$ et $\underline{c}$ donné.

La notion d'immersion

Pour indiquer qu'une solution de (1) dépend de la variable t , on note généralement :

$$\underline{x} = \underline{x}(t)$$

Mais, si l'on fait la remarque importante que cette solution dépend également de la condition initiale $\underline{x}(0) = \underline{c}$, pour tenir compte de cette nouvelle dépendance, on peut noter :

$$\underline{x} = \underline{x}(t, \underline{c})$$

Cette façon de procéder, largement développée par POINCARÉ, joue depuis longtemps un rôle important dans l'étude des équations différentielles non linéaires.

En fait, elle implique que l'étude d'une solution de l'équation différentielle (1) peut être menée à partir de l'étude d'une famille de solutions (en considérant que $\underline{c}$ est une variable indépendante). Elle est à la base de la notion "d'immersion".

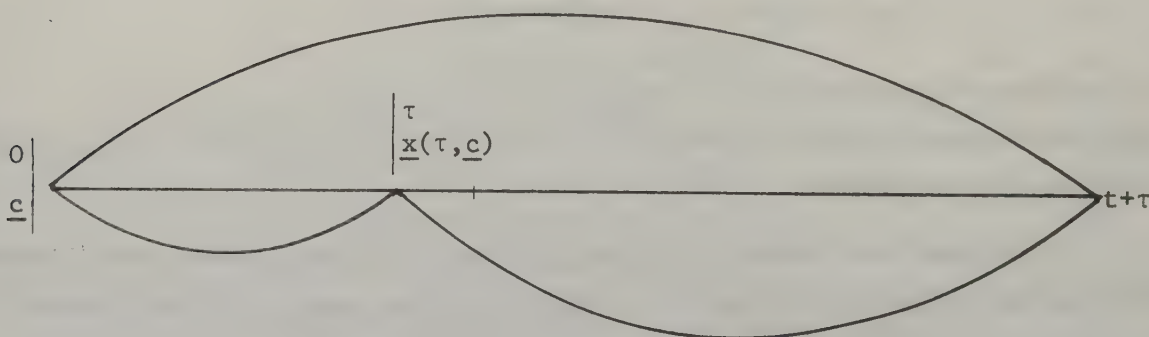
La notion d'invariance

Nous avons "postulé" que le système (1) admet une solution unique pour $t \geq 0$ et $\underline{c}$ donné. Nous allons examiner une conséquence immédiate de cette hypothèse et, pour cela, observons la solution de (1) à l'instant $t+\tau$.

Comme la solution générale de (1) est unique pour un $\underline{c}$ donné, $\underline{x}(t+\tau)$ sera le même :

- que l'on amène directement le système en $(t+\tau)$, depuis le point de départ $0, \underline{c}$

- qu'on l'amène d'abord en τ (en partant de $0, \underline{c}$), que l'on observe la sortie en τ , $\underline{x}(\tau, \underline{c})$, puis que, partant de τ , $\underline{x}(\tau, \underline{c})$, on l'amène ensuite en t .



L'identité des états obtenus en $t+\tau$ de ces deux façons résulte du principe de "causalité" ou principe d'invariance.

Mathématiquement, on note :

$$\underline{x}(t+\tau, \underline{c}) = \underline{x}[t, \underline{x}(\tau, \underline{c})] \quad (2)$$

et cette relation traduit le fait que les solutions en (1) ont une propriété de semi groupe.

La juxtaposition de ces deux notions conduit alors au principe de résolution général de "l'Immersion Invariante".

Etant donné un problème particulier P à résoudre :

- l'immersion permet de l'inclure dans une famille de problèmes, apparentés à P,
- si chacun des problèmes de la famille possède une solution unique, une propriété telle que l'invariance permet alors de trouver les liens (4) qui les unissent entre-eux,
- il suffit alors de connaître la solution d'un quelconque problème de la famille pour remonter à la solution de (P) par l'intermédiaire de (4).

Dans le domaine de l'automatique, l'un des résultats les plus connus, issu du principe de l'Immersion Invariante, est sans doute la programmation dynamique :

- la famille concerne l'ensemble des problèmes, démarrant dans des conditions initiales différentes, de périodes d'optimisation variables,
- les liens entre les différents problèmes sont issus de l'application du principe d'optimalité de BELLMAN : "une politique optimale est telle que, quels que soient l'état initial et la décision initiale, les décisions suivantes doivent constituer une politique optimale par rapport à l'état résultant de la première décision",
- la solution évidente qui permet de résoudre l'ensemble des problèmes de la famille est celle du problème de période d'optimisation nulle, pour lequel le coût optimal est nul.

Cependant, les récents travaux de R.E. KALABA ont montré que l'on pouvait aller plus loin et, des problèmes, tels que la résolution des systèmes différentiels à valeurs limites en deux points, que l'on rencontre en commande ou en filtrage optimaux, ont reçu des solutions intéressantes.

Problèmes de commande

Comme nous venons de le rappeler, la programmation dynamique en elle-même utilise, pour établir les liens qui unissent les différents problèmes de commande d'une même famille, le principe d'optimalité.

Mais, si chacun de ces problèmes possède une solution unique, des liens supplémentaires peuvent être obtenus en utilisant le principe d'invariance.

C'est ainsi que, pour un problème de commande optimale, on peut adjoindre à l'équation de programmation dynamique des équations complémentaires relatives aux trajectoires d'état et de commande. L'ensemble constitue alors un système de CAUCHY aux dérivées partielles, dont la résolution permet d'obtenir les trajectoires optimales théoriquement en un seul balayage et pour toute la famille de problèmes considérée.

Problèmes de filtrage

Dans le domaine du filtrage, le rôle de l'Immersion Invariante est quelque peu différent. Les estimations optimales sont définies à partir de critères (généralement de moindres carrés) portant sur les erreurs de mesures et d'équations.

Par immersion d'un problème particulier dans une famille plus générale, et grâce aux propriétés d'invariance des solutions, on peut établir les liens qui lient les valeurs du critère d'optimisation, relatives à chacun des problèmes. Mais, cette fois, on ne possède pas la solution évidente qui permettrait de déclencher la résolution de l'ensemble des problèmes : pour parvenir à l'estimation optimale, il faut faire appel à des méthodes indirectes (cf. chapitre I-6).

Néanmoins, l'Immersion Invariante est à la base d'une théorie simplifiée de l'estimation, qui ne nécessite, tout au moins théoriquement, aucune connaissance d'ordre statistique concernant les bruits et perturbations affectant le système étudié, et qui ne fait appel à aucune mathématique sophistiquée.

Le rapport que nous présentons constitue une contribution à l'étude des problèmes de commande et de filtrage par Immersion Invariante et répond à un double objectif :

- élargir les premiers résultats, obtenus dans le domaine de la commande optimale, aux problèmes avec butées (sur les grandeurs de commande), tout en essayant d'en tirer des algorithmes d'intérêt pratique,

- mettre à profit "les facilités" qu'offre l'Immersion Invariante dans le domaine du filtrage, pour développer un nouvel algorithme répondant à des exigences concrètes des utilisateurs.

Le plan que nous avons adopté est le suivant :

1 - Un premier chapitre est tout d'abord consacré à rappeler les résultats obtenus par R.E. KALABA, auxquels nous avons fait allusion et qui sont à la base de nos développements futurs. Mais, de plus, pour familiariser le lecteur avec les approches et méthodes particulières propres à l'Immersion Invariante,

nous avons cru bon de les introduire au préalable sur un problème plus simple. C'est pourquoi nous traiterons d'abord de la résolution par Immersion Invariante d'un problème à valeurs limites en deux points.

2 - Le second chapitre "contribution à l'étude de problèmes de commande classiques" se placera d'un double point de vue : théorique d'une part, et pratique d'autre part.

Tout d'abord, nous reprendrons la formulation du problème de LAGRANGE avec butées possibles sur les commandes et nous montrerons comment l'approche par Immersion Invariante permet de le convertir directement en problème de CAUCHY (à valeurs limites en un seul point). Nous justifierons ensuite les différentes dérivations que nous aurons été amenés à faire, en montrant que, sous réserves de certaines hypothèses non restrictives, les solutions de ce système de CAUCHY s'identifient aux solutions du système à valeurs limites en deux points obtenu par application des conditions nécessaires de PONTRYAGIN.

Dans le cas général, les équations du système de CAUCHY sont des équations aux dérivées partielles, dont la résolution numérique constitue un problème ardu, surtout lorsque le nombre de variables indépendantes (lié à l'ordre du système étudié) devient important.

Nous montrerons que, dans le cadre de l'optimisation quadratique des systèmes linéaires, les équations aux dérivées partielles se réduisent en équations différentielles ordinaires, ce qui permet, même pour une dimension d'état élevée, de déterminer a priori un catalogue de trajectoires optimales proposées au choix d'un exploitant.

3 - "Nouvel algorithme de commande et de filtrage"

Le filtrage (resp. la commande) des systèmes linéaires, lorsque l'on utilise les critères classiques (KALMAN), font intervenir des termes en "erreurs d'équations" (resp. des termes de commande) qu'il est souvent difficile de pondérer par rapport aux erreurs de mesure (resp. écarts de régulation), surtout lorsque l'on ne dispose pas sur le problème de données statistiques ou économiques suffisantes.

Nous étudions un critère d'optimisation valable pour la commande et le filtrage, où les coefficients de pondération sont en nombre plus restreint et agissent de façon sélective sur les réponses.

Nous développerons tout d'abord les algorithmes de filtrage, qui sont obtenus de façon immédiate par Immersion Invariante, puis les algorithmes de commande en utilisant les propriétés de dualité.

Une étude de l'équation de RICCATI, associée à ces algorithmes, permet alors de préciser l'intérêt pratique des propriétés du filtre stationnaire et du régulateur, obtenus à l'aide de ce nouveau critère.

Chapitre I

PRINCIPALES METHODES MISES EN OEUVRE DANS UNE APPROCHE PAR IMMERSION INVARIANTE : APPLICATION A LA COMMANDE ET AU FILTRAGE OPTIMAL

I - INTRODUCTION -

Immerger un problème particulier dans une classe plus générale dont :

- on sait, d'une part, préciser les liens qui unissent les divers éléments,

- on connaît, d'autre part, une solution triviale afin de résoudre globalement avant d'en extraire la solution particulière recherchée, tel est donc le principe de résolution dans une approche par Immersion Invariante.

Sans aucun doute, cette définition est-elle très générale, mais elle est aussi essentiellement qualitative et, suivant le domaine d'application que l'on propose à l'Immersion Invariante, sa mise en oeuvre peut présenter des aspects très variés. Nous nous proposons donc, au cours de ce premier chapitre, de mettre en place les techniques et les méthodes propres à traiter les problèmes de contrôle et de filtrage optimal que nous aborderons dans la suite.

Tout d'abord, nous montrerons comment l'on peut reformuler un problème à valeurs limites en deux points, pour le placer dans un cadre propre à un traitement par Immersion Invariante, et comment on peut alors le convertir en problème de CAUCHY (problème à valeurs limites en un seul point). Dans un but de simplification, nous nous restreindrons à l'étude d'un problème à deux dimensions. La forme des équations obtenues nous permettra de dégager alors les caractères généraux du traitement numérique. Nous aborderons ensuite, plus directement, un problème de contrôle optimal, en précisant l'interconnexion Immersion Invariante - programmation dynamique, ainsi qu'un problème de filtrage dont nous établirons les algorithmes de résolution.

2 - PROBLEME A VALEURS LIMITES EN DEUX POINTS : UNE APPROCHE PAR IMMERSION INVARIANTE -

2,1 - Exposé du problème

Etant donné le système non linéaire suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, t)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y, t)$$

$$0 \leq t \leq T$$

soumis aux conditions limites :

$$x(0) = c$$

$$-\infty \leq c \leq +\infty$$

$$y(T) = 0$$

déterminer les trajectoires $x(t)$ et $y(t)$.

Plutôt que de nous heurter aux diverses difficultés de la résolution directe, nous allons essayer de transformer ce problème en un problème à conditions initiales uniquement (problème de CAUCHY).

2,2 - Nouvelle formulation - Obtention de la condition initiale manquante

Rangeons ce problème particulier qui se déroule sur une période $[0, T]$ dans la classe plus générale des problèmes se déroulant sur une période $[a, T]$, $0 \leq a \leq T$ et régis par les équations suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, t)$$

$$a \leq t \leq T$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y, t)$$

(1)

$$x(a) = c$$

$$-\infty \leq c \leq +\infty$$

$$y(T) = 0$$

Si l'on maintient T fixé, et si a prend toutes les valeurs possibles sur l'intervalle $[0, T]$, les divers problèmes de la famille ainsi définie se caractérisent par leur durée, qui n'est alors fonction que de a . Or, parmi tous ces éléments, il en est un dont on connaît la solution : le problème de durée nulle qui vérifie les conditions aux limites, c'est-à-dire :

$$x(a) = x(T) = c$$

$$(a = T)$$

$$y(a) = y(T) = 0$$

Pour que tous les problèmes soient uniquement "à conditions initiales", il faudrait connaître chaque fois la condition $y(a)$. Nous nous proposerons de rechercher cette valeur.

Cette condition initiale inconnue est une fonction de la durée (T-a) du problème, caractérisée par a, et de la condition imposée $x(a) = c$.

Pour tenir compte de cette double dépendance, nous noterons :

condition initiale inconnue d'un problème dé-
 $y(a) = r(a, c) =$ marrant à l'instant a, dont on connaît $x(a) = c$,
 et régi par les équations (1).

$r(a, c)$ est une variable dépendante dont a et c sont les variables indépendantes.

Pour définir les liens de parenté des différents problèmes de la famille, nous chercherons la relation qui existe entre le problème caractérisé par (a, c) et le problème voisin caractérisé par ((a+Δ), x(a+Δ)).

La condition initiale inconnue pour le problème voisin est $y(a+Δ)$.

Si Δ est pris suffisamment faible, on peut relier $y(a+Δ)$ à $y(a)$ en utilisant un développement de TAYLOR, c'est-à-dire que :

$$y(a+Δ) = y(a) + \dot{y}(a)Δ + O(Δ^2)$$

où $O(Δ^2)$ représente un infiniment petit d'ordre supérieur à 1 par rapport à Δ.

Afin de calculer $\dot{y}(a)$, écrivons le système (1) pour $t = a$

$$\begin{aligned}\dot{x}(a) &= f[x(a), y(a), a] = f[c, r(a, c), a] \\ \dot{y}(a) &= g[x(a), y(a), a] = g[c, r(a, c), a]\end{aligned}$$

d'où l'on tire :

$$y(a+Δ) = r(a, c) + g(c, r(a, c), a)Δ + O(Δ^2) \quad (2)$$

Mais nous avons également par définition :

$$y(a+Δ) = r(a+Δ, x(a+Δ))$$

Pour expliciter $x(a+Δ)$, on effectuera également un développement de TAYLOR au premier ordre :

$$\begin{aligned}x(a+Δ) &= x(a) + \dot{x}(a)Δ + O(Δ^2) \\ &= c + f[c, r(a, c), a]Δ + O(Δ^2)\end{aligned}$$

d'où l'on tire :

$$y(a+Δ) = r[a+Δ, c+f(c, r(a, c), a)Δ + O(Δ^2)]$$

Soit, en supposant que toutes les dérivées partielles existent :

$$y(a+Δ) = r(a, c) + r_a(a, c)Δ + r_c(a, c) f(c, r(a, c), a)Δ + O(Δ^2) \quad (3)$$

en notant :

$$r_a(a, c) = \frac{\partial r(a, c)}{\partial a} \quad r_c(a, c) = \frac{\partial r(a, c)}{\partial c}$$

En comparant les relations (2) et (3), il vient :

$$r(a,c) + g(c,r(a,c),a)\Delta + O(\Delta^2) = r(a,c) + r_a(a,c)\Delta + f(c,r(a,c),a) r_c(a,c)\Delta + O(\Delta^2)$$

soit, en passant à la limite ($\Delta \rightarrow 0$) :

$$\boxed{f[c,r(a,c),a] r_c(a,c) + r_a(a,c) = g[c,r(a,c),a]} \quad (4)$$

Pour le problème de durée nulle :

$$y(a) = y(T) = r(T,c) = 0 \quad (5)$$

La condition initiale inconnue $r(a,c)$ pourra donc être obtenue en intégrant à rebours l'équation aux dérivées partielles (4) à partir de la condition finale (5).

2,3 - Expression des solutions en x et g en fonction de r(a,c)

Nous venons donc d'établir une équation aux dérivées partielles que vérifie la condition initiale inconnue $y(a)$ et, par une intégration à rebours, nous pouvons obtenir cette condition par tout a et tout c. Pour obtenir les solutions du système (1), on pourrait donc envisager de conserver en mémoire l'ensemble de ces valeurs entre les instants 0 et T, puis une intégration dans le sens direct nous conduirait ensuite aux valeurs de x et y. Toutefois, remarquons qu'une telle procédure nécessite un double balayage :

- balayage à rebours pour trouver la condition initiale inconnue
- intégration dans le sens direct pour obtenir les trajectoires.

La question que l'on peut alors se poser est évidente : n'est-il pas possible d'obtenir directement $x(t)$ et $y(t)$ à partir du précédent résultat ?

2,31 - Obtention d'un nouveau système de CAUCHY

Soit t, un instant tel que $a \leq t \leq T$. Les valeurs de x et de y à cet instant dépendent évidemment du problème particulier que l'on traite. Or, chacun des problèmes étant caractérisé par sa durée, et par la condition imposée, x et y dépendent de t, mais aussi de a et de $x(a) = c$.

Nous noterons :

$x(t,a,c)$ valeurs de x et y à l'instant donné t, pour un
 $y(t,a,c)$ problème dont l'instant initial est a et la condition imposée $x(a) = c$.

Considérons le problème voisin dont l'instant initial est $a + \Delta$ et la condition initiale c_0 .

Au même instant t , les points observés seront :

$$x(t, a+\Delta, c_0)$$

$$y(t, a+\Delta, c_0)$$

Supposons que les trajectoires en x et y sont continues et considérons la trajectoire en x , issue du point (a, c) .

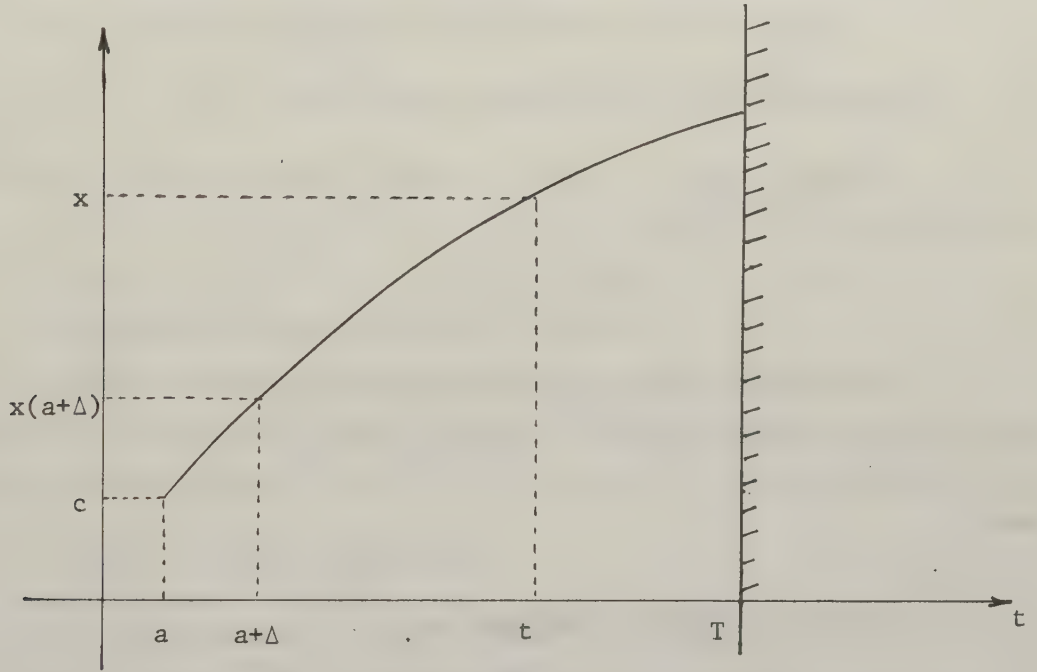


Fig. 1

Si les solutions du système (1) sont uniques et si nous prenons $c_0 = x(a+\Delta)$, c'est-à-dire sur la trajectoire issue de (a, c) , la valeur de x à l'instant t sera la même dans chacun des deux problèmes. Nous dirons que la trajectoire est invariante et nous pouvons traduire ce principe par la relation :

$$x(t, a, c) = x[t, a+\Delta, x(a+\Delta)] \quad (6)$$

Un raisonnement analogue peut être reconduit pour y , si bien que :

$$y(t, a, c) = y[t, a+\Delta, x(a+\Delta)] \quad (7)$$

Si Δ est choisi suffisamment faible, nous pouvons expliciter $x(a+\Delta)$ par un développement de TAYLOR au premier ordre :

$$\begin{aligned} x(a+\Delta) &= x(a) + f(x(a), y(a), a)\Delta + O(\Delta^2) \\ &= c + f(c, r(a, c), a)\Delta + O(\Delta^2) \end{aligned}$$

Si nous portons cette valeur dans les relations (6) et (7), il vient après développement :

$$x(t,a,c) = x(t,a,c) + \frac{\partial x}{\partial a}(t,a,c)\Delta + f[c, r(a,c), a] \frac{\partial a}{\partial c} \Delta + O(\Delta^2)$$

$$y(t,a,c) = y(t,a,c) + \frac{\partial y}{\partial a}(t,a,c)\Delta + f[c, r(a,c), a] \frac{\partial y}{\partial c} \Delta + O(\Delta^2)$$

Finalement, en faisant tendre Δ vers 0 on obtient :

$$x_a(t,a,c) + f[c, r(a,c), a] x_c(t,a,c) = 0 \quad (8)$$

$$y_a(t,a,c) + f[c, r(a,c), a] y_c(t,a,c) = 0 \quad (9)$$

D'autre part, si t est pris comme instant initial, les conditions limites sont alors connues.

$$x(t,t,c) = c \quad (10)$$

$$y(t,t,c) = r(t,c) \quad (11)$$

Les équations (8) et (9) munies des conditions (10) et (11) constituent donc un nouveau système de CAUCHY, dont l'intégration simultanée à celle de (4) fournit $x(t,a,c)$ et $y(t,a,c)$ à la fin d'un seul balayage pour tout a et tout c .

2,32 - Validation des équations

Reprenons le système (1) :

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y,t) \quad x(a) = c$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x,y,t) \quad y(T) = 0$$

A ce système, nous avons substitué l'ensemble d'équations suivant :

$$f[c, r(a,c), a] r_c(a,c) + r_a(a,c) = g[c, r(a,c), a] \quad (4)$$

$$r(T,c) = 0 \quad (5)$$

$$x_a(t,a,c) + f[c, r(a,c), a] x_c(t,a,c) = 0 \quad (8)$$

$$y_a(t,a,c) + f[c, r(a,c), a] y_c(t,a,c) = 0 \quad (9)$$

$$x(t,t,c) = c \quad (10)$$

$$y(t,t,c) = r(t,c) \quad (11)$$

Nous nous proposons maintenant de démontrer que $x(t,a,c)$ et $y(t,a,c)$, définis comme les solutions de (4), (5), (8), (9), (10) et (11), vérifient bien le système (1). Pour ce faire, nous montrerons que chacune de ces

solutions vérifie la même équation différentielle partielle, et que la condition initiale est identique.

Différencions l'équation (8) par rapport à t , et notons par un point une telle dérivation :

$$\dot{x}_a(t, a, c) + f[c, r(a, c), a] \dot{x}_c(t, a, c) = 0 \quad (12)$$

Nous avons là l'équation différentielle partielle à laquelle obéit $\dot{x}(t, a, c)$, considéré comme solution des équations (4) à (11).

Pour obtenir la condition initiale $\dot{x}(t, t, c)$, différencions (10) par rapport à t .

$$\dot{x}(t, t, c) + x_2(t, t, c) = 0 \quad x_2(t, t, c) = \left. \frac{\partial x(t, a, c)}{\partial a} \right|_{a=t}$$

En écrivant (8) pour $a = t$, il vient :

$$\begin{aligned} x_2(t, t, c) &= -f[c, r(t, c), t] x_c(t, t, c) \\ &= -f[c, r(t, c), t] \end{aligned}$$

et, par suite :

$$\dot{x}(t, t, c) = f[c, r(t, c), t] \quad (13)$$

Posons maintenant $Z(t, a, c) = f(x(t, a, c), y(t, a, c), t)$ et calculons successivement $Z_a(t, a, c)$ et $Z_c(t, a, c)$.

$$Z_a(t, a, c) = f_x(x, y, t) x_a(t, a, c) + f_y(x, y, t) y_a(t, a, c)$$

$$Z_c(t, a, c) = f_x(x, y, t) x_c(t, a, c) + f_y(x, y, t) y_c(t, a, c)$$

En portant les relations (8) et (9) dans $Z_a(t, a, c)$ et $Z_c(t, a, c)$, il vient immédiatement :

$$Z_a(t, a, c) + f[c, r(a, c), a] Z_c(t, a, c) = 0 \quad (14)$$

D'autre part, par définition nous avons :

$$\begin{aligned} Z(t, t, c) &= f[x(t, t, c), y(t, t, c), t] \\ &= f[c, r(t, c), t] \end{aligned} \quad (15)$$

Donc, $\dot{x}(t, a, c)$ et $Z(t, a, c)$ vérifient les équations différentielles identiques (12) et (14) munies des mêmes conditions initiales (13) et (15).

Nous avons supposé que les solutions étaient uniques ; on en tire donc :

$$\dot{x}(t, a, c) = Z(t, a, c) = f[x(t, a, c), y(t, a, c), t]$$

Une démonstration calquée sur la précédente établit de la même façon que :

$$\dot{y}(t, a, c) = g[x(t, a, c), y(t, a, c), t]$$

Par suite, $x(t,a,c)$ et $y(t,a,c)$, solution des équations (4), (5), (8), (9), (10) et (11), sont bien également les solutions du système (1) initial.

Toutefois, pour compléter cette démonstration, on pourrait se poser la question suivante : a-t-on bien :

$$y(t,a,c) = r[t, x(t,a,c)] \quad ?$$

Il suffit de calculer $r_a[t, x(t,a,c)]$ et $r_c[t, x(t,a,c)]$ pour s'apercevoir que $r[t, x(t,a,c)]$ vérifie la même équation partielle que $y(t,a,c)$ et que la condition initiale est identique.

2,4 - Conclusion

L'approche par l'Immersion Invariante, d'un problème à valeurs limites en deux points, nous a permis de lui substituer un problème à conditions initiales uniquement caractérisé par les équations aux dérivées partielles (4), (8) et (9). L'équation (4) intégrée à rebours à partir de la condition (5) fournit pour tout a et tout c la condition initiale inconnue. Les valeurs des solutions x et y , à un instant t donné, $a \leq t \leq T$, peuvent être obtenues au cours du même balayage par l'adjonction des équations (8) et (9) qui sont alors intégrées simultanément à partir de (10) et (11).

L'ensemble de la démarche adoptée et des résultats peut être synthétisé dans le tableau suivant :

$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y,t) \\ \dot{y} &= g(x,y,t) \\ x(a) &= c \\ y(T) &= 0 \end{aligned}$	(1)
↓	
$f[c, r(a,c), a] \cdot r_c(a,c) + r_a(a,c) = g[c, r(a,c), a]$	(4)
$r(T,c) = 0$	(5)

qui permet d'obtenir la condition initiale $y(a) = r(a,c)$ et de résoudre ensuite le système (1) : double balayage.



$$x_a(t,a,c) + f[c, r(a,c), a] x_c(t,a,c) = 0 \quad (8)$$

$$y_a(t,a,c) + f[c, r(a,c), a] y_c(t,a,c) = 0 \quad (9)$$

$$x(t,t,c) = c \quad (10)$$

$$y(t,t,c) = r(t,c) \quad (11)$$

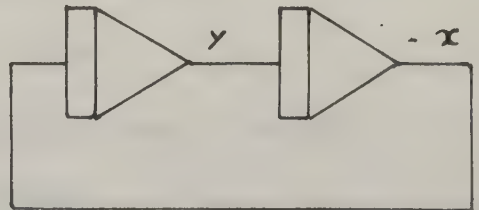
L'intégration simultanée de (8), (9) et (4) fournit la solution à la fin d'un seul balayage.

Dans le cas général, le prix d'un tel avantage est payée par la conversion d'un système différentiel ordinaire en un système aux dérivées partielles.

Cependant, des simplifications peuvent apparaître, en particulier lorsque le système (1) est linéaire, le système de CAUCHY aux dérivées partielles se réduisant alors à un système ordinaire, ce que l'on peut voir immédiatement sur l'exemple suivant.

Soit, donc, le problème à valeurs limites en deux points, issu d'un traitement d'un problème de commande optimale par les méthodes variationnelles, suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = -x & y(T) = 0 \end{cases}$$



Replaçons ce problème dans un cadre propre à une approche par Immersion Invariante et envisageons les problèmes définis par :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y & x(a) = c \\ \dot{y} = -x & y(T) = 0 \end{cases} \quad 0 \leq a \leq t \leq T$$

Si nous notons $r(a,c)$ la condition initiale inconnue $y(a)$, l'équation (4) s'écrit alors :

$$-r(a,c) r_c(a,c) + r_a(a,c) = -c \quad (4)$$

$$r(T,c) = 0 \quad (5)$$

Cette équation pourrait être intégrée à l'aide de méthodes propres aux équations aux dérivées partielles, telle que la méthode des caractéristiques.

Mais, comme le système initial est linéaire, supposons que $r(a,c)$ dépend linéairement de c et notons :

$$r(a,c) = \rho(a)c$$

L'équation (4) est alors transformée en une équation de RICCATI en a :

$$\rho_a(a) = \rho^2(a) - 1$$

qui s'intègre directement et, compte tenu de la condition (5), on tire :

$$\rho(a) = -\operatorname{th}(a-T)$$

Par suite, $r(a,c) = -c \operatorname{th}(a-T)$.

Réécrivons maintenant l'équation (8) :

$$x_a(t,a,c) - y(a,a,c) x_c(t,a,c) = 0$$

$$x_a(t,a,c) - r(a,c) x_c(t,a,c) = 0$$

$$x_a(t,a,c) + c \operatorname{th}(a-T) x_c(t,a,c) = 0$$

Le système étant linéaire, $x(t,a,c)$ dépend linéairement de sa condition initiale ; posons :

$$x(t,a,c) = \omega(t,a) c$$

La précédente équation partielle se ramène donc à :

$$\omega_a(t,a) + \operatorname{th}(a-T) \omega(t,a) = 0$$

$$\omega(t,t) = 1$$

Ce qui s'intègre directement :

$$\omega(t,a) = \frac{\operatorname{ch}(t-T)}{\operatorname{ch}(a-T)}$$

et, par suite :

$$x(t,a,c) = c \frac{\operatorname{ch}(t-T)}{\operatorname{ch}(a-T)}$$

De la même façon, on tirerait :

$$y(t,a,c) = c \frac{\operatorname{sh}(t-T)}{\operatorname{ch}(a-T)}$$

Pour le problème particulier que nous avons envisagé initialement $a = 0$ et $c = x_0$. D'où l'on tire :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \frac{\operatorname{ch}(t-T)}{\operatorname{ch}(T)} \\ y(t) = x_0 \frac{\operatorname{sh}(t-T)}{\operatorname{ch}(T)} \end{cases}$$

3 - AUTRES TECHNIQUES POUR OBTENIR LES EQUATIONS D'UN SYSTEME DE CAUCHY DANS UNE APPROCHE PAR IMMERSION INVARIANTE -

Après avoir replacé le problème à valeurs limites en deux points, dans un cadre propre à une approche par Immersion Invariante, la technique que nous avons utilisée pour parvenir aux équations du système de CAUCHY équivalent n'utilise que les développements de TAYLOR au premier ordre. De plus, l'immersion du problème dans la classe plus générale est faite par modification de la durée, en perturbant l'instant initial. Dans la suite, pour aborder les problèmes de filtrage, nous aurons recours à d'autres techniques. Aussi, nous proposons nous maintenant de les exposer de manière détaillée, afin de pouvoir y renvoyer dans la suite. Nous prendrons encore comme support un problème à valeurs limites en deux points, que nous chercherons à convertir en problème de CAUCHY.

3,1 - Système linéaire non stationnaire - méthode de dérivation

Considérons donc le système suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= q_{11}(t) x(t) + q_{12}(t) y(t) \\ - \frac{dy}{dt} &= q_{21}(t) x(t) + q_{22}(t) y(t)\end{aligned}$$

et soumis aux conditions aux limites :

$$\begin{aligned}x(0) &= 0 & 0 \leq t \leq T \\ y(T) &= 1\end{aligned}$$

Le but recherché est évidemment d'obtenir les trajectoires $x(t)$ et $y(t)$ et, comme précédemment, nous proposons de transformer ce problème en un problème à valeurs limites en un seul point. Par contre, nous chercherons aussi à obtenir la condition finale inconnue $x(T)$.

L'idée de base qui guide l'approche que nous allons faire reste la même, nous connaissons la solution lorsque la période T est de durée nulle.

Pour définir un cadre plus général, supposons donc que l'instant initial reste fixe (nul ici), mais faisons varier la durée des divers problèmes en supposant l'instant final non fixé et représenté par a .

Soit, donc, l'ensemble de problèmes définis par :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= q_{11}(t) x(t) + q_{12}(t) y(t) \\ - \frac{dy}{dt} &= q_{21}(t) x(t) + q_{22}(t) y(t)\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 & 0 \leq t \leq a \leq T \\ y(a) &= 1 \end{aligned}$$

Il est clair que les solutions x et y dépendent à la fois du temps présent t et de la durée de la période a .

Nous noterons donc :

$$\begin{aligned} x &= x(t, a) \\ y &= y(t, a) \end{aligned}$$

En tenant compte de cette dépendance, le système (1) peut se réécrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x_t(t, a) &= q_{11}(t) x(t, a) + q_{12}(t) y(t, a) \\ - y_t(t, a) &= q_{21}(t) x(t, a) + q_{22}(t) y(t, a) \end{aligned} \quad (2)$$

$$x_t(t, a) = \frac{\partial x(t, a)}{\partial t} \quad y_t(t, a) = \frac{\partial y(t, a)}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} x(0, a) &= 0 \\ y(a, a) &= 1 \end{aligned}$$

La condition finale recherchée $x(a, a)$ dépend évidemment des conditions aux limites ci-dessus, et, comme le système est linéaire et homogène, $x(a, a)$ dépend de $x(0, a)$ et $y(a, a)$ de manière linéaire.

Notons : $x(a, a) = R(a)$

Dérivons cette relation par rapport à a :

$$\frac{dR(a)}{da} = x_t(a, a) + x_2(a, a) \quad (3)$$

$$x_2(a, a) = \left. \frac{\partial(x(t, a))}{\partial a} \right|_{t=a}$$

Ecrivons le système (2) pour $t = a$:

$$\begin{aligned} x_t(a, a) &= q_{11}(a) x(a, a) + q_{12}(a) y(a, a) \\ - y_t(a, a) &= q_{21}(a) x(a, a) + q_{22}(a) y(a, a) \end{aligned}$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} x_t(a, a) &= q_{11}(a) R(a) + q_{12}(a) \\ - y_t(a, a) &= q_{21}(a) R(a) + q_{22}(a) \end{aligned} \quad (4)$$

Ce qui nous permet de réécrire la relation (3) de la façon suivante :

$$\frac{dR(a)}{da} = q_{11}(a) R(a) + q_{12}(a) + x_2(a, a)$$

Afin de calculer $x_2(a, a)$, dérivons le système (1) par rapport à a ; il vient :

$$\begin{aligned} x_{ta}(t, a) &= q_{11}(t) x_2(t, a) + q_{12}(t) y_2(t, a) \\ - y_{ta}(t, a) &= q_{21}(t) x_2(t, a) + q_{22}(t) y_2(t, a) \end{aligned} \quad (5)$$

$$y_2(a, a) = \left. \frac{\partial y(t, a)}{\partial a} \right|_{t=a}$$

$$x_2(0, a) = 0 \quad \text{et} \quad y_2(a, a) = \frac{dy}{da} - y_t(a, a)$$

$$y_2(a, a) = - y_t(a, a) \quad \text{car} \quad y(a, a) = 1$$

Le système (5) que nous venons ainsi de définir est linéaire et homogène en $x_2(t, a)$ et $y_2(t, a)$. Il possède les mêmes coefficients que le système (1) et ne s'en distingue que par une condition limite.

Un système linéaire et homogène admettant une solution unique, lorsqu'elle existe, sur un intervalle $(0, T)$, ou en déduit donc que $x_2(t, a)$ et $y_2(t, a)$ sont proportionnels à $x(t, a)$ et $y(t, a)$. Le coefficient de proportionnalité est obtenu en comparant les conditions aux limites différentes.

D'où l'on tire :

$$x_2(t, a) = - y_t(t, a) x(t, a)$$

$$y_2(t, a) = - y_t(t, a) y(t, a)$$

A l'instant $t = a$ on tire donc :

$$x_2(a, a) = - y_t(a, a) x(a, a) = - y_t(a, a) R(a)$$

Soit, en remplaçant $y_t(a, a)$ par sa valeur :

$$x_2(a, a) = [q_{21}(a) R(a) + q_{22}(a)] R(a)$$

et, finalement, nous obtenons l'équation différentielle qui régit $R(a)$:

$$\frac{dR(a)}{da} = q_{12}(a) + [q_{11}(a) + q_{22}(a)] R(a) + q_{21}(a) R^2(a) \quad (6)$$

$$R(0) = x(0, a) = 0 \quad (7)$$

Cette équation (6) intégrée depuis l'instant 0, à partir de la condition initiale (7) jusqu'à l'instant T, fournit donc la condition finale inconnue. Le problème initial est alors converti en un problème à valeurs finales uniquement.

Comme au paragraphe précédent, il est alors possible d'obtenir des équations complémentaires pour obtenir directement les trajectoires en x et y, en utilisant le principe d'invariance. Nous ne les développerons pas ici, et nous nous bornerons à constater qu'une approche par Immersion Invariante n'impose pas de technique particulière, mais peut s'adapter au type du problème que l'on envisage. Nous avons ici fait appel aux propriétés de linéarité et d'homogénéité du système. Remarquons, en outre, que la condition inconnue est donnée par une équation différentielle ordinaire de RICCATI.

3,2 - Méthode des perturbations

Soit, maintenant, le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,y,t) \\ - \frac{dy}{dt} &= g(x,y,t) \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 & 0 \leq t \leq T \\ y(T) &= c & -\infty \leq c \leq +\infty \end{aligned}$$

Pour obtenir l'Immersion, nous allons cette fois perturber le point final, c'est-à-dire faire varier à la fois la valeur finale et la durée.

Envisageons donc la famille de problèmes définis par les équations :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,y,t) \\ - \frac{dy}{dt} &= g(x,y,t) \end{aligned} \tag{9}$$

$$0 \leq t \leq a \leq T$$

et soumis aux conditions limites :

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ y(a) &= c & -\infty \leq c \leq \infty \end{aligned}$$

Pour tenir compte de tous les paramètres dont dépendent les solutions en x et y, nous noterons comme précédemment :

$$\begin{aligned} x &= x(t,a,c) \\ y &= y(t,a,c) \end{aligned}$$

ce qui fait que les conditions aux limites peuvent se réécrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} x(0, a, c) = 0 \\ y(a, a, c) = c \end{cases} \quad \forall a$$

Pour définir les liens de parenté des divers problèmes de la famille, envisageons un problème voisin, caractérisé par son instant final $a+\Delta$ et par la même condition finale c .

Il est alors régi par le système différentiel :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, a+\Delta, c) &= f[x(t, a+\Delta, c), y(t, a+\Delta, c), t] \\ - \dot{y}(t, a+\Delta, c) &= g[x(t, a+\Delta, c), y(t, a+\Delta, c), t] \end{aligned} \quad (10)$$

et ses conditions limites sont :

$$\begin{aligned} x(0, a+\Delta, c) &= 0 \\ y(a+\Delta, a+\Delta, c) &= c \end{aligned}$$

En choisissant Δ suffisamment faible, nous dirons que ce nouveau problème se déduit du premier par une perturbation de l'instant final. Notons :

$$\begin{aligned} x(t, a+\Delta, c) &= x(t, a, c) + z(t, a, c)\Delta + O(\Delta^2) \\ y(t, a+\Delta, c) &= y(t, a, c) + q(t, a, c)\Delta + O(\Delta^2) \end{aligned} \quad (11)$$

La connaissance de $z(t, a, c)$ et $q(t, a, c)$ fournira donc les liens qui unissent les divers problèmes de la famille entre eux.

Si nous voulons n'avoir que des conditions finales pour les divers problèmes envisagés, la valeur inconnue est alors $x(a, a, c)$.

Nous la noterons $x(a, a, c) = r(a, c)$.

Cherchons maintenant à quelle équation différentielle obéit cette condition finale inconnue.

Pour ce faire, nous allons expliciter $x(a+\Delta, a+\Delta, c)$ en fonction de $x(a, a, c)$ et des diverses perturbations.

Si Δ est suffisamment petit, effectuons un développement de TAYLOR au premier ordre ; il vient :

$$x(a+\Delta, a+\Delta, c) = x(a, a+\Delta, c) + \dot{x}(a, a+\Delta, c)\Delta + O(\Delta^2) \quad (12)$$

Les relations (11) nous permettent alors d'explicitier :

$$\begin{aligned} x(a, a+\Delta, c) &= x(a, a, c) + z(a, a, c)\Delta + O(\Delta^2) \\ \dot{x}(a, a+\Delta, c) &= \dot{x}(a, a, c) + \dot{z}(a, a, c)\Delta + O(\Delta^2) \end{aligned}$$

Si nous réécrivons la relation (12) en négligeant les termes du second ordre et plus en Δ , il vient :

$$x(a+\Delta, a+\Delta, c) = x(a, a, c) + z(a, a, c)\Delta + f[x(a, a, c), y(a, a, c), a]\Delta$$

Soit encore :

$$r(a+\Delta, c) = r(a, c) + z(a, a, c)\Delta + f[r(a, c), c, a]\Delta$$

Développons au premier ordre le membre de gauche de cette relation et faisons tendre Δ vers 0.

$$r_a(a, c) = z(a, a, c) + f[r(a, c), c, a] \quad (13)$$

Pour que cette relation (13) puisse nous servir à calculer $r(a, c)$, il faut donc essayer d'explicitier $z(a, a, c)$. Nous chercherons donc tout d'abord le système différentiel qui régit les perturbations $z(t, a, c)$ et $q(t, a, c)$, puis nous montrerons que $x_c(t, a, c)$ et $y_c(t, a, c)$ sont soumis à un système linéaire homogène identique, ne se distinguant du précédent que par les conditions limites.

En dérivant par rapport au temps les relations (11), puis en portant dans (9), il vient :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, a, c) + \dot{z}(t, a, c)\Delta &= f[x+z\Delta, y+q\Delta, t] \\ - \dot{y}(t, a, c) - \dot{q}(t, a, c)\Delta &= g[x+z\Delta, y+q\Delta, t] \end{aligned}$$

Soit, en développant au premier ordre les membres de droite et en faisant tendre Δ vers 0 :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t, a, c) &= z(t, a, c) f_x(x, y, t) + q(t, a, c) f_y(x, y, t) \\ - \dot{q}(t, a, c) &= z(t, a, c) g_x(x, y, t) + q(t, a, c) g_y(x, y, t) \end{aligned} \quad (14)$$

Cherchons quelles sont les conditions aux limites de ce nouveau système.

Comme $x(0, a, c) = 0 \quad \forall a$

$$x(0, a+\Delta, c) = 0 \quad \text{et par suite} \quad z[0, a, c] = 0 \quad (15)$$

Calculons, d'autre part, $y(a+\Delta, a+\Delta, c)$:

$$y(a+\Delta, a+\Delta, c) = y(a, a+\Delta, c) + \dot{y}(a, a+\Delta, c)\Delta + O(\Delta^2)$$

Ce qui peut encore s'écrire, en négligeant les termes du second ordre :

$$\begin{aligned} y(a, a+\Delta, c) &= y(a+\Delta, a+\Delta, c) - \dot{y}(a, a+\Delta, c)\Delta + O(\Delta^2) \\ &= c + g[x(a, a, c), y(a, a, c), a]\Delta + O(\Delta^2) \end{aligned}$$

Soit, enfin :

$$c + q(a, a, c)\Delta = c + g[r(a, c), c, a]\Delta + O(\Delta^2)$$

D'où l'on tire :

$$q(a, a, c) = g[r(a, c), c, a] \quad (16)$$

Pour obtenir le système différentiel régissant $x_c(t, a, c)$ et $y_c(t, a, c)$, différencions (9) par rapport à c ; il vient directement :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_c(t, a, c) &= x_c(t, a, c) f_x(x, y, t) + y_c(t, a, c) f_y(x, y, t) \\ - \dot{y}_c(t, a, c) &= x_c(t, a, c) g_x(x, y, t) + y_c(t, a, c) g_y(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

les conditions aux limites étant :

$$x_c(0, a, c) = 0 \quad y_c(a, a, c) = 1$$

(14) et (17) sont des systèmes différentiels linéaires et homogènes. Les solutions, si elles existent, dépendent donc linéairement des conditions aux limites.

Pour l'un et l'autre de ces systèmes, l'une de ces conditions est nulle, et, comme (14) et (17) sont identiques, on en déduit que $z(t, a, c)$ et $q(t, a, c)$ sont proportionnels à $x_c(t, a, c)$ et $y_c(t, a, c)$. Pour déterminer le coefficient de proportionnalité, il suffit de comparer les autres valeurs limites ($q(a, a, c)$ et $y_c(a, a, c)$).

D'où l'on tire :

$$z(t, a, c) = g[r(a, c), c, a] x_c(t, a, c) \quad (18)$$

ainsi que :

$$q(t, a, c) = g[r(a, c), c, a] y_c(t, a, c)$$

Si nous faisons $t=a$ dans (18), il vient :

$$z(a, a, c) = g[r(a, c), c, a] x_c(a, a, c)$$

soit encore :

$$z(a, a, c) = g[r(a, c), c, a] r_c(a, c) \quad (19)$$

Portons (19) dans (13) :

$$r_a(a, c) = g[r(a, c), c, a] r_c(a, c) + f[r(a, c), c, a] \quad (20)$$

$$r(0, c) = 0 \quad (21)$$

L'équation différentielle partielle (20) intégrée depuis l'instant 0, à partir de (21) jusqu'à l'instant final a , fournit donc la seconde valeur qui transforme le problème de départ en un problème à valeurs terminales uniquement. Comme dans le précédent exemple, pour obtenir la résolution complète du système en un seul balayage, il faudrait alors compléter en adjoignant les équations partielles traduisant l'invariance des trajectoires.

4 - QUELQUES ASPECTS DES PROBLEMES DE CALCUL NUMERIQUE -

Jusqu'à maintenant, nous n'avons traité et développé que des exemples scalaires, ce qui fait que les conditions aux deux bouts étaient en nombre égal. Toutes ces approches pouvant être généralisées au cas multidimensionnel, il se peut que les conditions connues ne soient pas en même nombre en chacune des extrémités. Si cela ne constitue pas une difficulté sur le plan théorique, il faudra néanmoins prendre certaines précautions sur le plan pratique pour effectuer les intégrations. En effet, si l'approche par Immersion Invariante permet de convertir le problème à valeurs limites en deux points en un problème de CAUCHY, le prix de cet avantage est payé par la transformation des équations différentielles ordinaires en équations aux dérivées partielles. L'intégration demande alors des algorithmes spécialisés, et la complexité de l'intégration numérique est directement liée au nombre de variables indépendantes. Aussi, chaque fois que cela est possible, est-il souhaitable de rechercher "l'Immersion" en perturbant l'extrémité mettant en jeu le moins de variables indépendantes.

La résolution d'un problème se fait en un seul balayage, mais il est nécessaire d'adjoindre à l'équation fournissant la condition manquante autant de systèmes complémentaires que de points désirés sur la période de calcul. Dans le cas de systèmes d'ordre élevé, le nombre d'équations partielles à intégrer devient important.

Nous avons obtenu les équations en supposant que l'on pouvait effectuer toutes les dérivations, sans nous attarder sur l'aspect mathématique de ces dérivations. Pour certains problèmes non linéaires, l'intégration numérique rencontre également d'autres difficultés liées à l'existence de points conjugués dans la période du calcul (apparition de dérivées partielles infinies pour certains couples de valeurs a, c). Aussi, peut-on dire que l'intégration numérique, dans le cas général, est extrêmement délicate, et nécessite de puissantes machines. Toutefois, et nous avons pu le constater sur certains des exemples qui viennent d'être envisagés, des propriétés telles que la linéarité ou l'homogénéité des systèmes peuvent conduire à d'importantes simplifications, en particulier, l'obtention d'équations ordinaires. Bien que ces dernières soient non linéaires,

leur intégration numérique est considérablement simplifiée par rapport au cas général, et une approche d'un problème par Immersion Invariante présente alors un intérêt important sur le plan pratique.

5 - UN PROBLEME DE CONTROLE OPTIMAL : IMMERSION INVARIANTE ET PROGRAMMATION DYNAMIQUE -

Nous venons donc de voir que l'Immersion Invariante pouvait être une approche efficace pour le traitement des problèmes à valeurs limites en deux points. Toutefois, dans la majorité des cas, les problèmes de ce type que l'on rencontre en automatique n'existent pas en eux-mêmes, mais sont les résultats d'une première approche : ainsi, dans un problème de contrôle optimal traité par le calcul des variations, ou par la théorie de PONTRYAGIN, l'optimum est caractérisé par un certain nombre de conditions nécessaires, se présentant sous la forme de système différentiel ordinaire avec valeurs limites en plusieurs points. Les trajectoires vérifient alors le principe d'optimalité. Donc, pour que l'on puisse aborder directement un problème de contrôle optimal, sans passer par l'intermédiaire du problème à valeurs limites en deux points qui lui correspond, la seule difficulté restant à lever réside dans la manière dont on peut relier les divers problèmes entre eux. C'est précisément ce que réalise la technique de la programmation dynamique utilisant le principe d'optimalité de BELLMAN.

Nous allons donc aborder un problème de contrôle optimal directement en développant successivement les équations de programmation dynamique proprement dite, puis les équations d'invariance. Nous supposons que le processus est décrit par une représentation d'état non linéaire et éventuellement non stationnaire, et envisagerons les cas continus et discrets.

5,1 - Cas continu

Pour un processus complètement commandable, décrit par sa représentation d'état sous la forme :

$$\dot{\underline{x}} = g(\underline{x}, y)$$

on cherche la commande $y(t)$ pour $t \in [0, T]$ qui minimise le critère de performance :

$$J = \int_0^T h(\underline{x}, y) dt$$

sachant que $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$.

Nous supposons l'état de dimension n , et la commande scalaire. Une lettre soulignée représente un vecteur, et nous noterons une transposition par une lettre T à droite :

$$\underline{x}^T = \text{transposé du vecteur } \underline{x}$$

Tout d'abord, ce problème va être replacé dans un cadre plus général propre à une approche par Immersion Invariante. Nous allons considérer la classe de problèmes consistant à rechercher les commandes optimales du processus lorsque la période d'optimisation est, non plus $[0, T]$, mais $[a, T]$, $0 \leq a \leq t \leq T$.

a désigne alors l'instant initial et nous supposons que la condition initiale est $\underline{x}(a) = \underline{c}$.

Un problème particulier de cette famille est alors décrit par l'ensemble d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{g}(\underline{x}, y) & 0 \leq a \leq t \leq T \\ \underline{x}(a) &= \underline{c} \\ J &= \min_y \int_a^T h(\underline{x}, y) dt \end{aligned}$$

Le critère minimum devient alors une fonction de la durée de l'optimisation, et par suite de a et de l'état initial, c'est-à-dire $\underline{x}(a) = \underline{c}$, nous noterons :

$$f(a, \underline{c}) = \min_y \int_a^T h(\underline{x}, y) dt$$

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, la première équation récurrente va être obtenue à partir du principe d'optimalité que nous allons rappeler :

Une politique optimale est telle que, quel que soit l'état initial et la décision initiale, les décisions suivantes constituent une politique optimale par rapport à l'état résultant de la première décision.

Plaçons nous donc à l'instant a , et soit W la commande appliquée à cet instant. En choisissant un intervalle Δ suffisamment faible, nous pouvons calculer l'état résultant de l'application de W , en utilisant un développement de TAYLOR au premier ordre.

$$\underline{x}(a+\Delta) = \underline{x}(a) + \dot{\underline{x}}(a)\Delta + O(\Delta^2)$$

On calcule alors $\dot{\underline{x}}(a)$ en faisant $t = a$ dans l'équation d'état.

Ce qui entraîne :

$$\underline{x}(a+\Delta) = \underline{c} + \underline{g}(\underline{c}, W)\Delta + O(\Delta^2)$$

Le principe d'optimalité nous permet alors d'écrire :

$$f(a, \underline{c}) = \min_W [\bar{h}(\underline{c}, W)\Delta + f(a+\Delta, \underline{c} + \underline{g}(\underline{c}, W)\Delta + O(\Delta^2))]$$

ce qui, après développement au premier ordre et passage à la limite, nous donne :

$$- f_a(a, \underline{c}) = \min_W [\bar{h}(\underline{c}, W) + \underline{g}^T(\underline{c}, W) \underline{f}_c(a, \underline{c})] \quad (1)$$

avec :

$$f_a(a, \underline{c}) = \frac{\partial f(a, \underline{c})}{\partial a} \quad \underline{f}_c(a, \underline{c}) = \frac{\partial f(a, \underline{c})}{\partial \underline{c}} = \left[\frac{\partial f}{\partial c_i} \right]$$

En outre, ceci suppose que d'une part $f_a(a, \underline{c})$ et $\underline{f}_c(a, \underline{c})$ existent, et, d'autre part, que f_{aa} , F_{cc} , $\underline{f}_{ca}$ sont bornées.

(1) constitue alors l'équation classique de la programmation dynamique et s'intègre à rebours à partir de la condition finale (2), $f(T, \underline{c}) = 0$ (le critère est nul lorsque le problème est à durée nulle).

Posons : $W_{\min} = r(a, c)$.

La résolution du problème de commande à l'aide de cette seule équation de la programmation dynamique demande alors la constitution d'un fichier des valeurs de $r(a, \underline{c})$, pour toutes les valeurs du domaine de variation $\underline{c}$ et pour tout a appartenant à l'intervalle $[0, T]$, puis un second balayage pour obtenir les valeurs de $\underline{x}$ et y .

Pour pallier cette difficulté, nous allons développer comme nous l'avons fait précédemment des équations complémentaires, en utilisant le principe d'invariance des trajectoires.

A un instant $t \in [a, T]$, état et commande sont des fonctions de la durée de l'optimisation, donc de a , et de la condition initiale $\underline{x}(a) = \underline{c}$. On tient compte de cette dépendance en notant :

$$\begin{aligned} x &= \underline{x}(t, a, \underline{c}) \\ y &= y(t, a, \underline{c}) \end{aligned}$$

Caractérisons par $(a, \underline{c})$ un certain problème de la famille. Un problème voisin est caractérisé par un couple $(a+\Delta, c')$. A ce second problème correspond un état à l'instant t que l'on peut noter :

$$\underline{x}(t, a+\Delta, c')$$

Les trajectoires optimales sont invariantes, c'est-à-dire que toute portion de trajectoire optimale est optimale ; donc si c' n'est pas pris quelconque, mais sur la trajectoire correspondant au premier problème, nous aurons :

$$\underline{x}(t, a, \underline{c}) = \underline{x}(t, a + \Delta, \underline{c}')$$

Il faut donc pour cela que $\underline{c}' = \underline{x}(a + \Delta)$, c'est-à-dire :

$$\underline{c}' = \underline{c} + \underline{g}(\underline{c}, r(a, \underline{c}))\Delta$$

Finalement, nous pouvons écrire :

$$\underline{x}(t, a, \underline{c}) = \underline{x}(t, a + \Delta, \underline{c} + \underline{g}(\underline{c}, r(a, \underline{c}))\Delta)$$

Développons au premier ordre le membre de droite :

$$\underline{x}(t, a, \underline{c}) = \underline{x}(t, a, \underline{c}) + \underline{x}_a(t, a, \underline{c})\Delta + X_c(t, a, \underline{c}) \underline{g}(\underline{c}, r(a, \underline{c}))\Delta + O(\Delta^2)$$

$$X_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial c_j} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} i \text{ indice de ligne} \\ j \text{ indice de colonne} \end{array}$$

En simplifiant par Δ , puis en faisant tendre Δ vers 0, il vient :

$$\underline{x}_a(t, a, \underline{c}) + X_c(t, a, \underline{c}) \underline{g}(\underline{c}, r(a, \underline{c})) = 0 \quad (3)$$

La solution évidente de cette équation est obtenue lorsque $a = t$:

$$\underline{x}(t, t, \underline{c}) = \underline{c} \quad (5)$$

De la même façon, on obtient une relation homologue pour $y(t, a, \underline{c})$:

$$y_a(t, a, \underline{c}) + \underline{g}^T(\underline{c}, r(a, \underline{c})) \underline{y}_c(t, a, \underline{c}) = 0 \quad (4)$$

dont la condition initiale est :

$$y(t, t, \underline{c}) = r(t, \underline{c}) \quad (6)$$

La validité de ces équations différentielles (3) et (4) est liée à l'existence des différentes dérivées premières par rapport à a et $\underline{c}$ et à la "non infinité" des dérivées secondes. Nous justifierons l'ensemble de ces équations dans la suite, lorsque nous traiterons plus en détail les problèmes de commande.

La résolution numérique du problème de commande se fait alors en un seul balayage suivant le schéma suivant :

- intégration à rebours de l'équation (1) de la programmation dynamique à partir de la condition (2)

- à l'instant t , adjonction des équations (3) et (4) qui sont alors intégrées simultanément, respectivement à partir des conditions (5) et (6).

Il faut insister sur le fait que $\underline{x}(t, a, \underline{c})$ et $y(t, a, \underline{c})$ ne sont obtenus

qu'en fin de balayage à rebours, c'est-à-dire lorsqu'on est parvenu au temps a en $x(a) = c$.

Il y aura autant d'adjonction de système (3), (4) que de points à calculer sur la trajectoire.

5,2 - Cas discret

Considérons le même processus monovariable d'ordre n , mais supposons que sa représentation d'état est donnée sous forme discrète par l'équation récurrente suivante :

$$\underline{x}(k+1) = \underline{g}[\underline{x}(k), y(k), k]$$

la condition initiale étant : $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$

Le critère à minimiser est alors pris de la forme :

$$J = \sum_{0}^K h[\underline{x}(k), y(k), k]$$

Le problème à résoudre est alors : connaissant la condition initiale $\underline{x}_0$, déterminer la loi de commande qui rend le critère J minimum.

Le raisonnement que nous allons tenir est calqué en tous points sur celui tenu dans le cas continu, aussi nous nous bornerons à rappeler les principes mis en oeuvre sans revenir dans le détail.

Supposons donc l'instant final fixe K , et envisageons les problèmes d'optimisation démarrant à l'instant p , alors que le système est dans l'état initial $\underline{x}(p) = \underline{c}$.

Le critère optimal est alors fonction de p et $\underline{c}$ et nous noterons :

$$f(p, \underline{c}) = \min_{\substack{K \\ [y(k)] \text{ } k=p}} \sum h[\underline{x}(k), y(k), k]$$

$$0 \leq p \leq k \leq K$$

La première relation récurrente est alors obtenue en appliquant le principe d'optimalité. Appelons $W(p)$ la commande appliquée à l'instant p et explicitons le premier terme de la sommation ci-dessus. Il vient :

$$f(p, \underline{c}) = \min_{W(p)} \left[\min_{W(k)} \left[h(\underline{x}(p), W(p), p) + \sum_{p+1}^K h[\underline{x}(k), W(k), k] \right] \right]$$

Le premier terme du crochet n'étant pas affecté par la seconde minima-

lisation, il vient :

$$f(p, \underline{c}) = \min_{W(p)} \left[h[\underline{c}, W(p), p] + \min_{W(k)} \sum_{p+1}^K h[\underline{x}(k), W(k), k] \right]$$

Soit encore :

$$f(p, \underline{c}) = \min_{W(p)} \left[h[\underline{c}, W(p), p] + f(p+1, \underline{g}(\underline{c}, W(p), p)) \right] \quad (7)$$

La condition finale pour $p = K$ s'écrivant alors :

$$f(K, \underline{c}) = \min_{W(K)} [h(\underline{c}, W(K), K)] \quad (8)$$

(7) muni de la condition finale (8) constitue l'équation récurrente de la programmation dynamique.

Comme dans le cas continu, nous ferons apparaître les divers arguments de $\underline{x}$ et y en notant :

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \underline{x}(k, p, \underline{c}) & 0 \leq p \leq k \leq K \\ y &= y(k, p, \underline{c}) & -\infty \leq c \leq \infty \end{aligned}$$

et nous poserons :

$$W(p)_{\min} = r(p, \underline{c})$$

Appliquons maintenant la propriété d'invariance des trajectoires optimales.

Il vient :

$$\underline{x}(k, p, \underline{c}) = \underline{x}[k, p+1, \underline{x}(p+1, p, \underline{c})]$$

$\underline{x}(p+1, p, \underline{c})$ est obtenu en faisant $k = p$ dans l'équation d'état :

$$\underline{x}(p+1, p, \underline{c}) = \underline{g}[\underline{x}(p, p, \underline{c}), y(p, p, \underline{c}), p]$$

Comme :

$$\begin{aligned} \underline{x}(p, p, \underline{c}) &= \underline{c} \\ y(p, p, \underline{c}) &= r(p, \underline{c}) \end{aligned}$$

on en tire :

$$\underline{x}(p+1, p, \underline{c}) = \underline{g}[\underline{c}, r(p, \underline{c}), p]$$

Par suite, l'état $\underline{x}(k, p, \underline{c})$ est donné par l'équation récurrente suivante :

$$\underline{x}(k, p, \underline{c}) = \underline{x}[k, p+1, \underline{g}(\underline{c}, r(p, \underline{c}), p)] \quad (9)$$

$$\underline{x}(p, p, \underline{c}) = \underline{c} \quad (10)$$

De la même façon, on obtient pour y :

$$y(k, p, \underline{c}) = y[k, p+1, \underline{g}(\underline{c}, r(p, \underline{c}), p)] \quad (11)$$

$$y(p, p, \underline{c}) = r(p, \underline{c}) \quad (12)$$

Les équations (7) à (12) constituent alors les équations pour le cas discret. La résolution de ces équations se fait selon un schéma identique à celui exposé pour le cas continu.

5,3 - Conclusion

Contrairement à la programmation dynamique seule, où dans la résolution d'un problème de contrôle il est nécessaire de conserver en mémoire les fonctions $f(a, \underline{c})$ et $r(a, \underline{c})$ pour tout a et toutes valeurs de $\underline{c}$, et où les états et les commandes sont obtenus après un double balayage, nous pourrions obtenir ces mêmes grandeurs après un seul balayage. Le calcul ne nécessite la mise en mémoire de $f(a, \underline{c})$, $r(a, \underline{c})$, $\underline{x}$ et y que pour une seule valeur de a à la fois.

Si les difficultés rencontrées pour l'intégration d'équations aux dérivées partielles restent les mêmes, notons cependant que se trouve partiellement supprimé le principal inconvénient de la programmation dynamique, le "fléau de la dimension". Par contre, l'obtention de $\underline{x}$ et y pour une seule valeur t nécessite l'adjonction d'un système complet d'équations différentielles. Si on désire connaître état et commande pour plusieurs valeurs du temps dans l'intervalle d'optimisation, et si l'ordre du système est élevé, le problème de calcul numérique peut alors prendre à nouveau des dimensions importantes.

6 - ESTIMATION D'ETAT PAR IMMERSION INVARIANTE -

6,1 - Introduction : définition d'une estimation optimale

Dans toute la suite de ce paragraphe, nous considérerons l'instant présent t comme un instant final, et nous noterons la variable temps par τ .

Soit (τ) un processus, dont les signaux d'entrée - sortie sont parfaitement connus sur un intervalle $[0, t]$ (on notera $z(t)$ la sortie mesurée).

Soit $(\bar{\omega})$ un modèle de ce processus défini par l'équation :

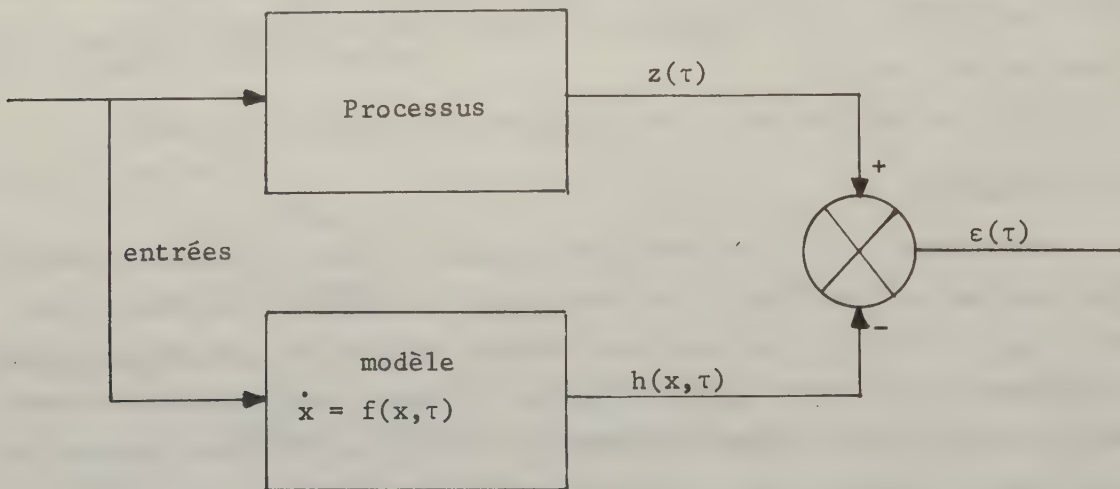
$$\frac{dx}{d\tau} = f(x, \tau) \quad (1)$$

et sur lequel la sortie mesurée est :

$$s(\tau) = h(x, \tau)$$

soit :
$$\varepsilon(\tau) = z(\tau) - h(x, \tau)$$

S'il est possible de trouver $x(t)$ répondant à (1) et tel que $\varepsilon(\tau)$ soit identiquement nul sur tout l'intervalle $[0, t]$, on dira alors que $x(t)$ représente l'état du processus à l'instant t .



Or, en raison des diverses perturbations pouvant affecter le processus (π) , ou la mesure $z(\tau)$, $\varepsilon(\tau)$ ne sera jamais identiquement nul sur $[0, t]$.

On appellera alors estimation optimale de l'état du processus à l'instant t , un vecteur $e(t)$, tel qu'un critère portant sur $\varepsilon(\tau)$ soit minimum.

Nous nous proposons maintenant, en nous plaçant dans une optique déterministe, de déterminer les algorithmes de filtrage (fournissant $e(t)$) en utilisant une approche par Immersion Invariante.

Nous envisagerons successivement les deux cas suivants :

- le modèle est exact, mais la mesure bruitée,
- le modèle est inexact et la mesure bruitée.

6,2 - Estimation d'un état en présence d'une incertitude sur la mesure

6,21 - Exposé du problème

Considérons un système unidimensionnel, dont le modèle peut être représenté par l'équation non linéaire suivante :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \tau)$$

et supposons que, du fait de perturbations ou de bruit de mesures, la grandeur observée est non pas $x(\tau)$, mais $z(\tau)$ donné par l'équation :

$$z(\tau) = x(\tau) + \text{erreurs de mesure} + \text{bruits divers}$$

En appelant t l'instant présent, le problème envisagé est alors le suivant :

Sur la base du signal observé $z(\tau)$ pendant l'intervalle $0 \leq \tau \leq t$, obtenir une estimation de l'état présent, $x(t)$.

L'estimation sera optimale si le critère de moindre carré J est minimum :

$$J = \int_0^t (x(\tau) - z(\tau))^2 d\tau \quad 0 \leq \tau \leq t$$

6,22 - Nouvelle formulation du problème

On notera $x(t) = c$, l'équation d'état étant connue, si on connaît la condition $x(t) = c$, la trajectoire complète est déterminée. Il suffira donc que la minimisation de J porte sur c .

Soit $y(\tau)$ une nouvelle variable définie de la façon suivante :

$$y(\tau) = \int_0^\tau [x(\tau) - z(\tau)]^2 d\tau$$

L'équation différentielle de $y(\tau)$ est alors :

$$\frac{dy}{d\tau} = [x(\tau) - z(\tau)]^2$$

et sa condition finale $y(t) = J$

Si l'on considère $x(t) = c$ connu, $y(t)$ est alors une condition finale inconnue du problème régi par les équations différentielles suivantes :

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x, \tau) \quad 0 \leq \tau \leq t$$

$$\frac{dy}{d\tau} = [x(\tau) - z(\tau)]^2$$

$$x(t) = c \quad y(t) = J$$

Nous allons maintenant utiliser une approche par Immersion Invariante, afin de rechercher la condition finale $y(t)$ inconnue.

Considérons donc le problème plus général suivant :

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x, \tau) \quad x(a) = c$$

$$\frac{dg}{d\tau} = [x(\tau) - z(\tau)]^2 \quad 0 \leq \tau \leq a \leq t$$

La condition $y(a)$ inconnue est alors fonction bien entendu de a (la durée du problème étant $t-a$), mais aussi de $x(a) = c$. Nous noterons :

$$y(a) = r(a, c)$$

Afin de chercher l'équation différentielle qui régit $r(a, c)$, nous allons utiliser la méthode des développements de TAYLOR, précédemment exposée dans le cadre de la résolution d'un problème à valeurs limites en deux points.

Calculons donc $y(a+\Delta)$.

D'une part, nous écrirons que :

$$y(a+\Delta) = y(a) + \dot{y}(a)\Delta + O(\Delta^2)$$

et, d'autre part :

$$y(a+\Delta) = r(a+\Delta, x(a+\Delta))$$

$\dot{y}(a)$ est obtenu en faisant $t = a$ dans l'équation différentielle en y . Ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} y(a+\Delta) &= y(a) + [x(a) - z(a)]^2 \Delta + O(\Delta^2) \\ &= r(a, c) + [c - z(a)]^2 \Delta + O(\Delta^2) \end{aligned}$$

De la même façon, on exprimera $x(a+\Delta)$ en faisant un développement semblable :

$$\begin{aligned} x(a+\Delta) &= x(a) + \dot{x}(a)\Delta + O(\Delta^2) \\ &= c + f[c, a]\Delta + O(\Delta^2) \end{aligned}$$

D'où l'on tire :

$$r[a+\Delta, x(a+\Delta)] = r[a+\Delta, c + f(c, a)\Delta + O(\Delta^2)]$$

en remplaçant $x(a+\Delta)$ par sa valeur.

Soit, en développant au premier ordre :

$$r[a+\Delta, x(a+\Delta)] = r(a, c) + r_a(a, c)\Delta + f(c, a) r_c(a, c)\Delta + O(\Delta^2)$$

En identifiant les expressions $r[a+\Delta, x(a+\Delta)]$ et $y(a+\Delta)$ ainsi calculées, en divisant par Δ , puis en faisant tendre Δ vers 0, il vient finalement :

$$f(c,a) r_c(a,c) + r_a(a,c) = [c - z(a)]^2 \quad (2)$$

(2) constitue l'équation différentielle partielle de la condition manquante $r(a,c) = y(a)$.

6,23 - Valeur optimale de l'estimation

Remarquons que l'on ne connaît pas de condition initiale pour l'équation différentielle en $y(\tau)$. Autrement dit (2) ne pourra pas servir à calculer $r(a,c)$ à partir de la solution du problème de durée nulle.

D'autre part, $r(a,c) = y(a)$ représente la valeur du critère J lorsque $x(a) = c$. Or, jusqu'à maintenant, nous n'avons pas cherché à minimiser ce critère.

Soit $e(a)$ la valeur de l'estimation c minimisant J .

$e(a)$ sera tel que :

$$\left. \frac{\partial r(a,c)}{\partial c} \right|_{c=e} = r_c(a,e) = 0$$

Prenons la différentielle totale de cette expression :

$$r_{cc}(a,e) de + r_{ca}(a,e) da = 0$$

D'où l'on tire :

$$\frac{de}{da} = - \frac{r_{ca}(a,e)}{r_{cc}(a,e)}$$

la condition initiale de cette équation différentielle étant :

$$e(0) = e_0 = \text{meilleure estimation de l'état initial } x(0).$$

Afin de préciser un peu cette équation, nous allons calculer $r_{ca}(a,e)$. Pour cela, différencions (2) par rapport à c :

$$r_{cc}(a,c) f(c,a) + r_c(a,c) f_c(c,a) + r_{ca}(a,c) = 2[c - z(a)] \quad (3)$$

soit, pour l'optimum $c = e$:

$$r_{cc}(a,e) f(e,a) + r_{ca}(a,e) = 2[e - z(a)]$$

En portant dans $\frac{de}{da}$:

$$\frac{de}{da} = f(e, a) + 2 \frac{z(a) - e}{r_{cc}(a, e)} \quad (4)$$

Posons $p(a) = \frac{2}{r_{cc}(a, e)}$

(4) peut alors être écrite sous la forme :

$$\frac{de}{da} = f(e, a) + [z(a) - e(a)] p(a) \quad (5)$$

(5) représente donc l'équation différentielle de l'estimation optimale. Pour que cette équation soit parfaitement définie, nous devons maintenant préciser la fonction $p(a)$.

6,24 - Equation de fonction $p(a)$

Par définition, nous avons donc :

$$p(a) = \frac{2}{r_{cc}(a, e)}$$

Dérivons par rapport à a :

$$\frac{dp}{da} = -2 \frac{r_{ccc}(a, e) \frac{de}{da} + r_{cca}(a, e)}{r_{cc}^2(a, e)}$$

Calculons donc $r_{cca}(a, e)$ et $r_{ccc}(a, e)$.

Dérivons (3) par rapport à c :

$$\begin{aligned} r_{ccc}(a, c) f(c, a) + r_{cc} f_c(c, a) + r_{cc} f_c(c, a) + r_c(a, c) f_{cc}(c, a) \\ + r_{acc}(a, c) = 2 \end{aligned}$$

En faisant $c = e$ et en portant dans $\frac{dp}{da}$, il vient, en tenant compte de (5) :

$$\frac{dp}{da} = 2 f_c(e, a) p(a) - p^2(a) - \frac{p^3(a)}{2} [z(a) - e(a)] r_{ccc}(a, e)$$

$p(a)$ s'exprimant en fonction de $r_{cc}(a, e)$, nous constatons maintenant que $\frac{dp}{da}$ s'exprime en fonction de $r_{ccc}(a, e)$. Or, nous avons souligné que l'on ne pouvait pas obtenir $r(a, c)$, $\forall c$, par une intégration directe. Par conséquent, il sera impossible de calculer $r_{ccc}(a, e)$.

Par suite, nous ne pourrions calculer rigoureusement $p(a)$.

Toutefois, le critère étant quadratique, nous savons que, si le système d'état est linéaire, J est une fonction quadratique de c , de la forme :

$$J = r(a, c) = q_0(a) + q_1(a)c + q_2(a)c^2$$

Nous supposons que, dans le cas général où le système est non linéaire, on peut au voisinage de l'estimation optimale approximer le critère par un tel développement. Ceci implique alors que $r_{ccc}(a, e)$ est nul. Finalement, l'équation de $p(a)$ est alors :

$$\frac{dp}{da} = 2 f_e(e, a) q(a) - q^2(a) \quad (6)$$

6,25 - Conclusion

Nous obtenons donc l'équation différentielle de l'estimation optimale (5). Cette équation fait intervenir une "fonction poids" $p(a)$, dont nous avons pu de manière approchée dans le cas général déterminer l'équation différentielle (6). Pour que ce système différentiel nous conduise à l'estimation optimale, il faudrait connaître les conditions initiales de ces équations, ce qui n'est pas le cas. Aussi, en l'absence de la connaissance exacte de $x(0)$, nous initialiserons les algorithmes à l'aide d'une valeur $e(0) = e_0$ représentant une estimation initiale de l'état, et de p_0 , valeur initiale de la fonction poids que l'on peut définir comme la "confiance" accordée au choix de e_0 .

6,3 - Estimation d'état en présence d'incertitude sur la mesure et sur la représentation du système

6,31 - Exposé du problème

Soit un processus représenté par les équations :

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x, \tau) + g(x, \tau) \cdot v(\tau) \quad (7)$$

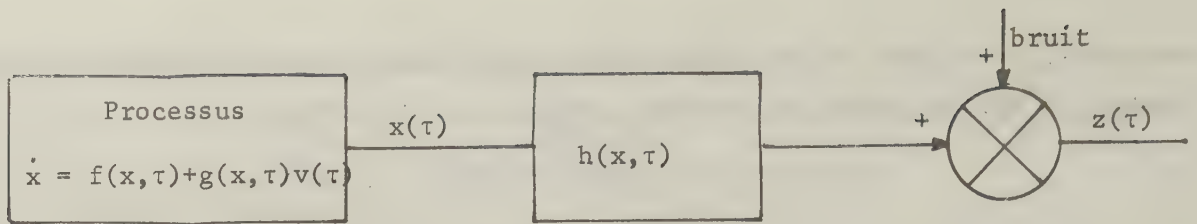
$$0 \leq \tau \leq t$$

dont la sortie observée est $z(\tau)$ donnée par :

$$z(\tau) = h(x, \tau) + \text{erreurs}$$

$v(\tau)$ est une fonction inconnue qui peut représenter :

- soit une perturbation réelle agissant sur le processus,
- soit une incertitude sur le modèle choisi, $f(x, \tau)$.



La fonction $f(x, \tau)$ dépend explicitement de τ , si bien que l'on peut y inclure toute entrée entièrement connue sur $[0, t]$, telle que la commande par exemple.

Le problème est alors : à partir de l'ensemble des mesures $y(\tau)$, $0 \leq \tau \leq t$, estimer l'état présent inconnu $x(t)$. L'estimation sera dite optimale si $x(t)$ satisfait l'équation (7) et si le critère :

$$J = \int_0^t \{ [z(\tau) - h(x, \tau)]^2 + \omega(\tau) [\dot{x}(\tau) - f(x, \tau)]^2 \} d\tau$$

est minimum.

$\omega(t)$ est une fonction de pondération des incertitudes, supposée toujours positive.

Du fait de la présence de la perturbation inconnue $v(\tau)$, la minimisation de J devra se faire maintenant, non plus simplement par rapport à la condition inconnue $x(t)$, mais aussi par rapport à l'entrée perturbatrice $v(\tau)$, $\forall \tau$, $[0, t]$.

6,32 - Principe de la résolution

Si nous considérons $v(\tau)$ comme une grandeur de commande sur laquelle on a une action, le problème précédemment défini peut être converti dans le suivant :

Trouver la commande $v(\tau)$, tel que $x(\tau)$ donné par l'équation (7) minimise le critère J .

(7) est alors considéré comme une contrainte et $x(t)$ apparaît comme étant la solution d'un problème de LAGRANGE. Les équations d'EULER - LAGRANGE définissent alors un problème à valeurs limites en deux points que nous chercherons ensuite à transformer en un problème de CAUCHY, en l'abordant par les méthodes de l'Immersion Invariante, telles que nous les avons précédemment exposées.

6,33 - Le problème de calcul des variations équivalent

En notant λ la variable adjointe, et en tenant compte de (7),

nous pouvons définir le hamiltonien suivant :

$$H = [z(\tau) - h(x, \tau)]^2 + \omega(\tau) g^2(x, \tau) v^2(\tau) + \lambda [\dot{x} - f(x, \tau) - g(x, \tau) v(\tau)]$$

$\lambda(\tau)$ est alors solution de l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\lambda} = -H_x$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = -2[z(\tau) - h(x, \tau)] h_x + 2\omega(\tau) g_x(x, \tau) v^2(\tau) - \lambda f_x(x, \tau) - \lambda g_x(x, \tau) v \quad (8)$$

$v(\tau)$, considéré comme un contrôle, est donné par :

$$\frac{\partial H}{\partial v} = 0 \quad \text{soit} \quad 2\omega(\tau) g^2(x, \tau) v(\tau) - \lambda g(x, \tau) = 0$$

Soit :

$$v(\tau) = \frac{\lambda}{2\omega(\tau) g(x, \tau)} \quad (9)$$

Portons (9) dans (7) et (8) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{d\tau} = f(x, \tau) + \frac{\lambda}{2\omega(\tau)} \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\lambda}{d\tau} = -2[z(\tau) - h(x, \tau)] h_x(x, \tau) - \lambda f_x(x, \tau) \end{array} \right. \quad (11)$$

Les conditions aux limites sont données par les conditions de transversalité :

$$\lambda(0) = 0 \quad (12)$$

$$\lambda(t) = 0 \quad (13)$$

Les équations (10) à (13) définissent donc un problème à valeurs limites en deux points.

6,34 - L'approche par Immersion Invariante

Ne perdons pas de vue que la grandeur que nous recherchons est $x(t)$. Cette grandeur se présente comme une valeur limite inconnue. Afin de la calculer ou tout au moins de déterminer à quelle condition différentielle elle obéit, nous allons placer le problème précédemment défini par (10) à (13) dans un cadre propre à une approche par Immersion Invariante.

Considérons donc le problème plus général défini par les équations différentielles (10) et (11) sur l'intervalle de temps $[0, a]$, $0 \leq \tau \leq a \leq t$, mais dont les conditions aux limites sont :

$$\lambda(0) = 0$$

$$\lambda(a) = c$$

On appellera $r(a, c)$ la condition inconnue $x(a)$, soit :

$$x(a) = r(a, c) = r[a, \lambda(a)]$$

Par la méthode des développements de TAYLOR, calculons de deux manières $x(a+\Delta) = r[a+\Delta, \lambda(a+\Delta)]$.

Nous aurons :

$$x(a+\Delta) = x(a) + \dot{x}(a)\Delta + O(\Delta^2)$$

et aussi :

$$\lambda(a+\Delta) = \lambda(a) + \dot{\lambda}(a)\Delta + O(\Delta^2)$$

$\dot{x}(a)$ et $\dot{\lambda}(a)$ sont obtenus en faisant $\tau = a$ dans les équations (10) et (11) :

$$\dot{x}(a) = f(x(a), a) + \frac{\lambda(a)}{2\omega(a)}$$

$$\dot{\lambda}(a) = -2[z(a) - h(x(a), a)] h_x(x(a), a) - \lambda(a) f_x(x(a), a)$$

D'où l'on tire :

$$x(a+\Delta) = r(a, c) + [f[r(a, c), a] + \frac{c}{2\omega(a)}]\Delta + O(\Delta^2)$$

$$\lambda(a+\Delta) = c + [2[z(a) - h(r(a, c), a)] h_x(r(a, c), a) - c f_x(r(a, c), a)]\Delta + O(\Delta^2)$$

Portons $\lambda(a+\Delta)$ dans $r[a+\Delta, \lambda(a+\Delta)]$ et développons :

$$\begin{aligned} r[a+\Delta, \lambda(a+\Delta)] &= \{-2[z(a) - h(r(a, c), a)] h_r(r(a, c), a) - c f_r(r(a, c), a)\} r_c(a, c)\Delta \\ &\quad + r_a(a, c)\Delta \end{aligned}$$

Finalement, en comparant les deux expressions de $x(a+\Delta)$, on tire l'équation différentielle suivante :

$$\{-2[z(a) - h(r(a, c), a)] h_r(r(a, c), a) - c f_r(r(a, c), a)\} r_c(a, c) + r_a(a, c) = f[r(a, c), a] + \frac{c}{2\omega(a)} \quad (14)$$

(14) représente l'équation de $x(a) = r(a, c)$.

6,35 - Les équations de filtrage

(14) définit la valeur finale $x(a)$ pour une classe très générale de problèmes. Or, nous nous intéressons à la famille plus restreinte des problèmes pour lesquels on a $c = 0$. En effet, la condition de transversalité (13) est : $\lambda(t) = 0$.

Soit :

$$e(a) = r(a, 0)$$

Au voisinage de $c = 0$, linéarisons $r(a, c)$ en développant au premier ordre ; il vient :

$$r(a, c) = e(a) + q(a)c + O(c^2) \quad (15)$$

$q(a)c$ étant un infiniment petit du premier ordre en c , portons (15) dans (14) :

$$\begin{aligned} & \{-2[z(a) - h(e + q(a)c, a)] h_r(e + q(a)c, a) + c f_r(e + q(a)c, a)\} q(a) \\ & + \frac{de}{da} + c \frac{dq}{da} = f(e + q(a)c, a) + \frac{c}{2\omega(a)} \end{aligned}$$

En développant les différentes expressions au premier ordre et en identifiant, on tire :

$$\begin{aligned} \frac{de}{da} &= f(e, a) + 2q(a) h_e(e, a) [z(a) - h(e, a)] \\ \frac{dq}{da} &= 2q(a) f_e(e, a) + 2q^2(a) [h_{ee}(e, a) (z(a) - h(e, a)) - h_e^2(e, a)] \\ & \quad + \frac{1}{2\omega(a)} \end{aligned}$$

Enfin, en posant :

$$p(a) = 2q(a)$$

nous obtenons les équations définitives d'estimation :

$$\frac{de}{da} = f(e, a) + p(a) h_e(e, a) [z(a) - h(e, a)] \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{da} &= 2p(a) f_e(e, a) + p^2(a) [h_{ee}(e, a) (z(a) - h(e, a)) - h_e^2(e, a)] \\ & \quad + \frac{1}{\omega(a)} \end{aligned} \quad (17)$$

6,36 - Conclusion

Comme dans le cas précédent, nous obtenons deux équations d'estimation, pour lesquelles il faudra choisir une initialisation.

Remarquons que si nous prenons le cas particulier :

$$h(x, \tau) = x(\tau)$$

les équations (5) et (16) sont identiques, alors que (17) se différencie de (6) par l'addition du terme supplémentaire $\frac{1}{\omega(a)}$ correspondant à la prise en compte de l'erreur sur l'équation d'état.

6,37 - Application sur un exemple

Considérons le processus linéaire représenté par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{d\tau} = A \underline{x}(\tau) + B \underline{u}(\tau) + \underline{v}(\tau) \quad (18)$$

dont la sortie mesurée est $\underline{z}(\tau)$, $\underline{u}(\tau)$ étant les grandeurs de commande, supposées entièrement connues sur $[0, t]$.

Soit $\underline{s}(\tau) = D \underline{x}(\tau)$ la sortie du modèle

$$\text{et } J = \int_0^t \{ ||\underline{z}(\tau) - C \underline{x}(\tau)||_Q^2 + ||\dot{\underline{x}} - A \underline{x} - B \underline{u}||_R^2 \} d\tau$$

le critère servant à définir l'estimation optimale $\underline{e}(t)$.

Si nous considérons $\underline{v}(\tau)$ comme une commande, le problème de calcul des variations, équivalent au problème de filtrage, conduit alors au système à valeurs limites en deux points suivant :

$$H = ||\underline{z} - D \underline{x}||_Q^2 + ||\underline{v}||_R^2 + [\dot{\underline{x}} - A \underline{x} - B \underline{u} - \underline{v}]^T \underline{\lambda}$$

$$\underline{H}_{\underline{v}} = 0$$

Soit :

$$\frac{dx}{d\tau} = A \underline{x}(\tau) + B \underline{u}(\tau) + \frac{1}{2} R^{-1} \underline{\lambda} \quad (19)$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = - 2 D^T Q [\underline{z} - D \underline{x}] A^T \underline{\lambda} \quad (20)$$

$$\underline{\lambda}(0) = 0 \quad (21)$$

$$0 \leq \tau \leq t$$

$$\underline{\lambda}(t) = 0 \quad (22)$$

La valeur limite inconnue que nous recherchons est $\underline{x}(t)$. Nous allons l'obtenir à l'aide d'une immersion du problème défini par les équations (19), (20), (21), (22), dans la classe plus générale des problèmes définis sur $0 \leq \tau \leq a$, à l'aide de (19) et (20), et vérifiant les conditions limites :

$$\underline{\lambda}(0) = 0 \quad (21)$$

$$\underline{\lambda}(a) = \underline{c} \quad (23)$$

Soit $\underline{x}(a)$ la valeur finale inconnue pour ces problèmes. $\underline{x}(a)$ dépend également de $\underline{c} = \underline{\lambda}(a)$.

Posons donc :

$$\underline{x}(a) = \underline{r}(a, \underline{\lambda}(a)) = \underline{r}(a, \underline{c}) \quad (24)$$

Pour le problème voisin, on a :

$$\underline{x}(a+\Delta) = \underline{r}[a, \underline{\lambda}(a+\Delta)] \quad (25)$$

En calculant séparément chacun des membres de (25), puis en faisant tendre $\Delta \rightarrow 0$, on obtient :

$$\underline{r}_a(a, \underline{c}) R_c \{ 2 D^T Q [\underline{z}(a) - D \underline{r}(a, \underline{c})] + A^T \underline{c} \} = A \underline{r}(a, c) + B \underline{u}(a) + \frac{1}{2} R^{-1} \underline{c} \quad (26)$$

Si nous linéarisons au premier ordre au voisinage de $c = 0$:

$$\underline{r}(a, \underline{c}) = \underline{e}(a) + \tilde{Q}(a) \underline{c} + \underline{O}(c^2)$$

$$\underline{r}_a(a, \underline{c}) = \frac{d\underline{e}}{da} + \frac{d\tilde{Q}}{da} \underline{c}$$

$$R_c(a, c) = \tilde{Q}(a)$$

En portant dans (26) et en faisant tendre $\underline{c}$ vers 0, on tire :

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{e}}{da} &= A \underline{e}(a) + B \underline{u}(a) + 2 \tilde{Q}(a) D^T Q [\underline{z}(a) - D \underline{e}(a)] \\ \frac{d\tilde{Q}}{da} &= \tilde{Q}(a) A^T + A^T \tilde{Q}(a) - 2 \tilde{Q}(a) D^T Q D \tilde{Q}(a) + \frac{1}{2} R^{-1} \end{aligned}$$

Soit, en posant $\tilde{Q}(a) = \frac{P(a)}{2}$

$$\frac{d\underline{e}}{da} = A \underline{e}(a) + B \underline{u}(a) + P(a) D^T Q [\underline{z}(a) - D \underline{e}(a)] \quad (27)$$

$$P_a(a) = P(a) A^T + A^T P(a) - P(a) D^T Q D P(a) + R^{-1} \quad (28)$$

(27) et (28) constituent donc les équations de filtrage fournissant l'estimation optimale $\underline{e}(a)$.

6,4 - Conclusion

Bien que l'Immersion Invariante joue un rôle très différent dans les deux problèmes que nous avons envisagés, nous pouvons faire les remarques générales suivantes :

- Le filtre obtenu est récurrent. Chaque nouvelle observation de la sortie du processus est exploitée directement, rendant l'algorithme utilisable en ligne.

- Moyennant certaines approximations (nous avons supposé le critère quadratique au voisinage du minimum dans le premier cas, tandis que, dans le second, nous avons linéarisé l'estimation), elle s'applique à des problèmes non linéaires (donc possibilité d'identifier des paramètres).

- Il n'est a priori fait aucune hypothèse d'ordre statistique sur les bruits et perturbations. Cette approche constitue une théorie aisée de l'estimation, en ce sens qu'elle ne nécessite à première vue aucune connaissance d'ordre statistique.

Si nous examinons les relations (28) et (29) qui sont les équations de filtrage dans le cas où le système est linéaire et en présence de bruit d'équation et de bruit de mesure, nous constatons qu'elles s'identifient exactement aux algorithmes que l'on obtient en utilisant les théories de KALMAN.

Les matrices Q et R , qui sont définies comme des matrices de pondération du critère, apparaissent en fait comme les inverses des matrices de variance - covariance du bruit de mesure et du bruit d'équation.

Si, à première vue, il n'est donc fait appel à aucune connaissance d'ordre statistique pour développer les algorithmes, nous retrouverons dans la mise en oeuvre (choix de Q et R) les mêmes difficultés qu'en utilisant la théorie de KALMAN.

Chapitre II

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE PROBLEMES DE COMMANDE CLASSIQUES

1 - INTRODUCTION -

L'étude que nous nous proposons de développer ici constitue une extension des premiers résultats obtenus dans le domaine de la commande optimale au paragraphe I-5. Elle présentera un double aspect : un aspect théorique et un aspect pratique.

1,1 - Aspect théorique

Pour le problème de contrôle monovariable, les équations de l'Immersion Invariante, telles que nous les avons développées, sont issues de l'application successive du "principe d'optimalité" et du "principe de translation invariante". Comme la seule programmation dynamique permet de prendre en compte des contraintes inégalités, aussi bien sur les commandes que sur les états, une extension possible des premiers résultats dans le domaine de contrôle optimal consiste donc à essayer de tenir compte de contraintes. Cependant, les équations du système de CAUCHY établi en I-5 sous entendent des conditions de continuité et de dérivabilité de la représentation du système, de la fonction coût instantané, du coût optimal ..., et, pour que les équations d'Immersion Invariante soient justifiées, il faut vérifier ces hypothèses. Pour parvenir à ces fins, nous avons utilisé une méthode indirecte qui consiste à identifier les solutions des équations partielles de l'Immersion Invariante aux solutions des équations homologues, tirées de l'application du principe du maximum de PONTRYAGIN.

Nous exposerons en II-2 les résultats auxquels nous sommes parvenus et qui concernent les problèmes de commande multivariables en présence de butées sur les commandes.

1,2 - Aspect pratique

Parmi toutes les voies possibles pour traduire les exigences des utilisateurs en matière de commande dynamique des processus, l'une des plus synthétiques est sans nul doute l'optimalisation quadratique. De par les avantages

qu'elle présente :

- elle permet d'approcher certains critères industriels (approximation au second ordre)
- développements mathématiques directs
- commande en boucle fermée lorsque le système est linéaire,

elle a déjà fait l'objet de nombreux développements et se trouve désormais parmi les théories classiques dans le domaine de la commande optimale.

Cependant, grâce aux simplifications que l'on y rencontre, considérer le problème de l'optimalisation quadratique des systèmes linéaires du point de vue de l'Immersion Invariante peut se révéler un moyen fructueux pour visualiser a priori des trajectoires optimales et étudier l'influence de paramètres, tels que la période d'optimalisation ou les coefficients de pondération du critère.

Dans cette optique, nous aborderons successivement les deux cas suivants :

- cas des systèmes multivariables non contraints, où les équations de l'Immersion Invariante se réduisent à des équations différentielles ordinaires.
- cas des systèmes monovariables, où, grâce aux précédentes simplifications, nous avons pu mettre au point une stratégie d'optimalisation en présence de butée sur la commande.

2 - COMMANDE MULTIVARIABLE CONTRAINTE -

2,1 - Introduction

Nous avons établi au paragraphe I-5 les équations partielles du problème de CAUCHY, associées à un problème de contrôle monovariable. Si la généralisation de ces précédents résultats au cas multivariable est assez immédiate, nous nous proposons, en outre, de prendre en compte des restrictions sur la commande. Dans le cas le plus général, il faudrait envisager une commande appartenant à un domaine fermé $U \subset \mathbb{R}^m$, mais, d'un point de vue pratique, la contrainte la plus couramment rencontrée étant une saturation des organes de commande, nous nous placerons dans l'hypothèse d'une commande restreinte par une inégalité de la forme $y \leq M$.

Pour démontrer la validité des équations que nous allons établir, sans trop nous étendre sur l'aspect mathématique des dérivations, nous montrerons alors leur équivalence avec les homologues, issues de l'application de la théorie de PONTYAGIN.

Le problème que nous allons envisager est donc le suivant :

Etant donné le système multivariable, à n états et m commandes, complètement commandable, défini par l'équation différentielle :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{y})$$

et par les conditions initiales :

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad -\infty \leq \underline{x}_0 \leq +\infty$$

déterminer la loi de commande $\underline{y}(t)$, $0 \leq t \leq T$, telle que le critère :

$$J = \int_0^T h(\underline{x}, \underline{y}) dt$$

soit minimum, $\underline{y}$ étant soumis à l'inégalité $\underline{y} \leq \underline{M}$, c'est-à-dire $y_i \leq M_i$, $\forall i \in [1, m]$.

2,2 - Les équations par Immersion Invariante

Comme dans le cas monovariable non contraint, nous allons appliquer successivement le principe d'optimalité et le principe d'invariance, mais, auparavant, nous devons reformuler le problème.

- Supposons l'instant final T fixé, et considérons les divers problèmes différenciés par :

- leur durée, alors fonction de l'instant initial a ; $0 \leq a \leq t \leq T$
- leur condition initiale $\underline{x}(a) = \underline{c}$ $-\infty \leq \underline{c} \leq \infty$

- A chacun de ces problèmes, associons une fonction coût :

$$J = \int_a^T h(\underline{x}, \underline{y}) dt \quad \underline{y} \leq \underline{M} \quad (1)$$

Le coût optimal est une fonction de a et de $\underline{c}$, nous le noterons :

$$f(a, \underline{c}) = \min_{\underline{y} \leq \underline{M}} \int_a^T h(\underline{x}, \underline{y}) dt \quad (2)$$

En supposant que la fonction $h(\underline{x}, \underline{y})$ est définie continue et dérivable par rapport à $\underline{x}$ et $\underline{y}$, l'application du principe d'optimalité conduit à l'équation de programmation dynamique suivante :

$$- f_a(a, \underline{c}) = \min_{\underline{W} \leq M} [h(\underline{c}, \underline{W}) + \underline{g}^T(\underline{c}, \underline{W}) \underline{f}_c(a, \underline{c})] \quad (3)$$

$$f_a(a, \underline{c}) = \frac{\partial f(a, \underline{c})}{\partial a} \quad \underline{f}_c(a, \underline{c}) = \left[\frac{\partial f}{\partial c_i} \right] \quad \begin{array}{l} i \text{ indice} \\ \text{de ligne} \end{array}$$

(3) est valide si $f(a, \underline{c})$ est continue par rapport à ses deux arguments, et si elle admet des dérivées partielles premières continues par rapport aux mêmes arguments.

Pour le problème de durée nulle ($a = T$), la solution évidente, permettant d'initialiser (2), est :

$$f(T, \underline{c}) = 0 \quad \forall \underline{c} \quad (4)$$

L'intégration à rebours de (3) à partir de (4), depuis T jusqu'à a , et compte tenu de la contrainte (1), fournit pour tout a et tout $\underline{c}$ la commande initiale optimale.

Nous noterons :

$$\underline{W}_{\min} = \underline{r}(a, \underline{c}) \quad a \leq T \quad (5)$$

Pour tenir compte de toutes les variables dont dépendent l'état et la commande, on note également :

$$\underline{x} = \underline{x}(t, a, \underline{c})$$

$$\underline{y} = \underline{y}(t, a, \underline{c})$$

ce qui signifie pour la première relation : état à l'instant t , lorsque l'instant initial est a , et la condition initiale connue $\underline{x}(a) = \underline{c}$.

Par suite, on en tire directement :

$$\underline{x}(t, t, \underline{c}) = \underline{c} \quad (10)$$

$$\underline{y}(t, t, \underline{c}) = \underline{r}(t, \underline{c}) \quad (11)$$

En appliquant alors le principe d'invariance des trajectoires optimales, nous pouvons écrire :

$$\underline{x}(t, a, \underline{c}) = \underline{x}[t, a+\Delta, \underline{x}(a+\Delta)] \quad (6)$$

$$\underline{y}(t, a, \underline{c}) = \underline{y}[t, a+\Delta, \underline{x}(a+\Delta)] \quad (7)$$

En supposant Δ suffisamment faible, $\underline{x}(a+\Delta)$ peut être calculé en fonction de $\underline{x}(a)$ à l'aide d'un développement de TAYLOR au premier ordre.

$$\begin{aligned} \underline{x}(a+\Delta) &= \underline{x}(a) + \dot{\underline{x}}(a)\Delta + O(\Delta^2) \\ &= \underline{c} + \underline{g}[\underline{c}, \underline{r}(a, \underline{c})]\Delta + O(\Delta^2) \end{aligned}$$

En portant dans (6) et (7) après développement au premier ordre, on obtient finalement :

$$\underline{x}_a(t, a, \underline{c}) + \underline{X}_c(t, a, \underline{c}) \underline{g}(\underline{c}, \underline{r}(a, \underline{c})) = 0 \quad (8)$$

$$\underline{y}_a(t, a, \underline{c}) + \underline{Y}_c(t, a, \underline{c}) \underline{g}(\underline{c}, \underline{r}(a, \underline{c})) = 0 \quad (9)$$

$$X_c(t, a, \underline{c}) = \left[\frac{\partial x_i(t, a, c)}{\partial c_j} \right] \quad \begin{array}{l} i \text{ indice de ligne} \\ j \text{ indice de colonne} \end{array}$$

(8) et (9) initialisées par (10) et (11) constituent donc les équations complémentaires de l'Immersion Invariante. Associées à l'équation de programmation dynamique (3), elles permettent d'obtenir état et commande en un seul balayage à rebours.

2,3 - Validation de ces équations

Supposons qu'il existe un intervalle $[a, T]$ sur lequel les solutions des équations (3), (4), (5), (8), (9), (10), (11) existent et sont uniques.

Pour le même problème de contrôle, le principe du minimum nous aurait conduit aux équations suivantes :

$$\min_{\underline{W} \leq \underline{M}} H(\underline{x}, \underline{W}, \underline{\lambda}) = H(\underline{x}, \underline{y}, \underline{\lambda}) \quad (12)$$

en définissant l'hamiltonien H de la façon suivante :

$$H(\underline{x}, \underline{y}, \underline{\lambda}) = h(\underline{x}, \underline{y}) + \underline{g}^T(\underline{x}, \underline{y}) \underline{\lambda}$$

$\underline{x}$ et $\underline{\lambda}$ sont alors les solutions du problème à valeurs limites en deux points suivant :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{H}\underline{\lambda} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{y}) \quad (13)$$

$$-\dot{\underline{\lambda}} = \underline{H}\underline{x} = \underline{h}_x(\underline{x}, \underline{y}) + \underline{G}_x^T(\underline{x}, \underline{y}) \underline{\lambda} \quad (14)$$

$$\underline{x}(a) = \underline{c} \quad (15)$$

$$\underline{\lambda}(T) = 0 \quad (16)$$

$$\underline{G}_x = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right]$$

Pour que l'on puisse comparer cette équation avec les équations (3) à (11), il est alors nécessaire d'introduire une équation supplémentaire pour la variable adjointe $\underline{\lambda}$.

Nous poserons donc $\underline{\lambda} = \underline{\lambda}(t, a, \underline{c})$ et supposerons que cette fonction est continue par rapport à t, a, et $\underline{c}$, qu'elle admet des dérivées premières continues par rapport aux mêmes arguments. On peut alors comme pour $\underline{x}$ et $\underline{y}$ utiliser le principe d'invariance, ce qui nous conduit à l'équation :

$$\underline{\lambda}_a(t, a, \underline{c}) + \underline{\lambda}_c(t, a, \underline{c}) \underline{g}[\underline{c}, \underline{r}(a, \underline{c})] = 0 \quad (17)$$

La condition initiale $\underline{\lambda}(t, t, \underline{c})$ est alors tirée d'un résultat de la théorie de HAMILTON - JACOBI :

$$\underline{\lambda}(t, t, \underline{c}) = \underline{f}_c(t, \underline{c}) \quad (18)$$

Pour établir l'équivalence entre les deux systèmes d'équations, nous procéderons de façon indirecte : nous montrerons qu'une solution des équations de l'Immersion Invariante, et que son homologue issue du principe du minimum, vérifient la même équation aux dérivées partielles du premier ordre, avec la même condition initiale.

$$2, 3, 1 \quad \dot{\underline{x}}(t, a, \underline{c}) \stackrel{?}{=} \underline{g}[\underline{x}(t, a, \underline{c}), \underline{y}(t, a, \underline{c})]$$

Différencions l'équation (8) par rapport à t :

$$\dot{\underline{x}}_a(t, a, \underline{c}) + \dot{\underline{x}}_c(t, a, \underline{c}) \underline{g}[\underline{c}, \underline{r}(a, \underline{c})] = 0 \quad (19)$$

(19) constitue l'équation différentielle partielle à laquelle obéit la fonction $\dot{\underline{x}}(t, a, \underline{c})$ considérée comme une solution des équations d'Immersion Invariante.

Cherchons maintenant la condition initiale $\dot{\underline{x}}(t, t, \underline{c})$.

Différencions (10) par rapport à t ; la dérivation par rapport au premier argument est notée à l'aide d'un point, tandis que la dérivation par rapport au second argument est notée à l'aide de l'indice 2.

$$\dot{\underline{x}}(t, t, \underline{c}) + \underline{x}_2(t, t, \underline{c}) = 0$$

On peut alors tirer $\underline{x}_2(t, t, \underline{c})$ en faisant $a = t$ dans la relation (8) :

$$\underline{x}_2(t, t, \underline{c}) + \dot{\underline{x}}_c(t, t, \underline{c}) \underline{g}(\underline{c}, \underline{r}(t, \underline{c})) = 0$$

avec, de plus :

$$\dot{\underline{x}}_c(t, t, \underline{c}) = \mathbb{I}$$

d'où l'on tire :

$$\dot{\underline{x}}(t, t, \underline{c}) = \underline{g}[\underline{c}, \underline{r}(t, \underline{c})] \quad (20)$$

Posons maintenant $\underline{Z}(t, a, \underline{c}) = \underline{g}[\underline{x}(t, a, \underline{c}), \underline{y}(t, a, \underline{c})]$.

Pour obtenir l'équation différentielle à laquelle obéit $\underline{Z}(t, a, \underline{c})$, nous sommes alors conduit à calculer $\underline{Z}_a(t, a, \underline{c})$ et $\underline{Z}_c(t, a, \underline{c})$.

(Chaque fois que cela ne présentera pas d'ambiguïté, nous ne ferons pas apparaître tous les arguments de $\underline{x}$ et $\underline{y}$).

On aura donc :

$$\underline{Z}_a(t, a, \underline{c}) = G_x(\underline{x}, \underline{y}) \underline{x}_a + G_y(\underline{x}, \underline{y}) \underline{y}_a$$

$$G_x = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right]_{n \times n} \quad G_y = \left[\frac{\partial g_i}{\partial y_k} \right]_{n \times m}$$

$$Z_c(t, a, \underline{c}) = G_x(\underline{x}, \underline{y}) X_c + G_y(\underline{x}, \underline{y}) Y_c$$

En tenant compte de (8) et (9), il vient :

$$\underline{Z}_a(t, a, \underline{c}) + Z_c(t, a, \underline{c}) \underline{g}(\underline{c}, \underline{r}(a, \underline{c})) = 0 \quad (21)$$

D'autre part, en faisant $a = t$ dans la définition de $\underline{Z}(t, a, \underline{c})$, on tire :

$$\underline{Z}(t, t, \underline{c}) = \underline{g}[\underline{x}(t, t, \underline{c}), \underline{y}(t, t, \underline{c})]$$

soit, d'après (10) et (11) :

$$\underline{Z}(t, t, \underline{c}) = \underline{g}[\underline{c}, \underline{r}(t, \underline{c})] \quad (22)$$

Il suffit alors de comparer (19), (20) et (21), (22), pour voir que la proposition est bien démontrée.

Mais, de plus, d'après (10) :

$$\underline{x}(t, t, \underline{c}) = \underline{c}$$

et, pour $t = a$:

$$\underline{x}(a, a, \underline{c}) = \underline{c}$$

ce qui est équivalent à la relation (15) du principe du minimum.

$$2,32 \quad -\dot{\underline{\lambda}} = \underline{h}_x(\underline{x}, \underline{y}) + G_x^T(\underline{x}, \underline{y}) \underline{\lambda}$$

Pour obtenir l'équation partielle à laquelle est soumis $\dot{\underline{\lambda}}(t, a, \underline{c})$, il suffit de dériver (17) par rapport à t .

$$\dot{\underline{\lambda}}_a(t, a, \underline{c}) + \dot{\underline{\lambda}}_c(t, a, \underline{c}) \underline{g}[\underline{c}, \underline{r}(a, \underline{c})] = 0 \quad (23)$$

Dérivons maintenant (18) par rapport à t :

$$\dot{\underline{\lambda}}(t, t, \underline{c}) + \underline{\lambda}_2(t, t, \underline{c}) = \underline{f}_{ct}(t, \underline{c})$$

On obtient $\underline{\lambda}_2(t, t, \underline{c})$ en faisant $a = t$ dans (17) :

$$\underline{\lambda}_2(t, t, \underline{c}) = -\underline{\lambda}_c(t, t, \underline{c}) \underline{g}[\underline{c}, \underline{r}(t, \underline{c})]$$

et par suite :

$$-\dot{\underline{\lambda}}(t, t, \underline{c}) = -\underline{f}_{ct}(t, \underline{c}) - \underline{\lambda}_c(t, t, \underline{c}) \underline{g}[\underline{c}, \underline{r}(t, \underline{c})]$$

et comme :

$$\begin{aligned}\underline{\lambda}(t, t, \underline{c}) &= \underline{f}_c(t, \underline{c}) \\ \underline{\Lambda}_c(t, t, \underline{c}) &= \underline{F}_{cc}(t, \underline{c})\end{aligned}$$

Donc :

$$-\dot{\underline{\lambda}}(t, t, \underline{c}) = -\underline{f}_{ct}(t, \underline{c}) - \underline{F}_{cc}(t, \underline{c}) \underline{g}[\underline{c}, \underline{r}(t, \underline{c})] \quad (24)$$

Définissons maintenant le vecteur $\underline{W}(t, a, \underline{c})$:

$$\underline{W}(t, a, \underline{c}) = \underline{h}_x(\underline{x}, \underline{y}) + \underline{G}_x^T(\underline{x}, \underline{y}) \underline{\lambda}$$

sa $i^{\text{ème}}$ composante sera :

$$W_i(t, a, \underline{c}) = h_{xi}(\underline{x}, \underline{y}) + g_{ix}^T(\underline{x}, \underline{y}) \underline{\lambda} \quad i \in [1, n]$$

$$h_{xi} = \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad g_{ix} = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right] \quad j = 1 \dots n$$

Nous allons successivement dériver cette composante par rapport à a et $\underline{c}$, mais en ne faisant pas apparaître tous les arguments, afin de simplifier l'écriture.

Il vient :

$$\begin{aligned}W_{ia} &= h_{xix}^T \underline{x}_a + h_{xiy}^T \underline{y}_a + g_{ix}^T \underline{\lambda}_a + \underline{x}_a^T G_{ix}^T \underline{\lambda} + \underline{y}_a^T G_{ix}^T \underline{\lambda} \\ W_{ic} &= X_c^T h_{xix} + Y_c^T h_{xiy} + X_c^T G_{ix}^T \underline{\lambda} + Y_c^T G_{ix}^T \underline{\lambda} + \underline{\Lambda}_c^T g_{ix}\end{aligned}$$

En portant (8) et (9) dans ces deux expressions, il vient :

$$W_{ia}(t, a, \underline{c}) + W_{ic}^T(t, a, \underline{c}) \underline{g}[\underline{c}, \underline{r}(a, \underline{c})] = 0$$

quel que soit $i \in [1, n]$.

Par suite :

$$\underline{W}_a(t, a, \underline{c}) + \underline{W}_c(t, a, \underline{c}) \underline{g}[\underline{c}, \underline{r}(a, \underline{c})] = 0 \quad (25)$$

(23) et (25) montrent donc que $-\dot{\underline{\lambda}}(t, a, \underline{c})$ et $\underline{W}(t, a, \underline{c})$ vérifient la même équation différentielle. Il nous reste à comparer les conditions initiales.

En faisant $a = t$ dans la définition de $\underline{W}(t, a, \underline{c})$, il vient :

$$\underline{W}(t, t, \underline{c}) = \underline{h}_x[\underline{c}, \underline{r}(t, \underline{c})] + \underline{G}_x^T[\underline{c}, \underline{r}(t, \underline{c})] \underline{f}_c(t, \underline{c}) \quad (26)$$

A-t-on bien (24) $\equiv$ (26) ?

Réécrivons l'équation de la programmation dynamique (3) pour

$a = t$:

$$- f_t(t, \underline{c}) = h[\underline{c}, \underline{r}(t, \underline{c})] + \underline{g}^T[\underline{c}, \underline{r}(t, \underline{c})] \underline{f}_c(\underline{c}, t)$$

soit, en différenciant par rapport à $\underline{c}$:

$$- \underline{f}_{tc}(t, \underline{c}) = \underline{h}_c + \underline{R}_c^T \underline{h}_r + \underline{R}_c^T \underline{G}_r^T \underline{f}_c + \underline{F}_{cc}^T \underline{g}$$

Portons cette expression dans (24) en remarquant que :

$$\underline{f}_{ct} = \underline{f}_{tc}$$

Il vient :

$$- \dot{\underline{\lambda}}(t, t, \underline{c}) = \underline{h}_c + \underline{R}_c^T [\underline{G}_r^T \underline{f}_c + \underline{h}_r] + \underline{G}_c^T \underline{f}_c + \underline{F}_{cc}^T \underline{g} - \underline{F}_{cc} \underline{g}$$

$\underline{F}_{cc}(t, \underline{c})$ matrice de dérivées secondes est symétrique, donc :

$$\underline{F}_{cc}^T \underline{g} = \underline{F}_{cc} \underline{g}$$

D'où l'on tire, d'après (26) :

$$- \dot{\underline{\lambda}}(t, t, \underline{c}) = \underline{W}(t, t, \underline{c}) + \underline{R}_c^T [\underline{G}_r^T \underline{f}_c + \underline{h}_r]$$

Examinons de plus près le vecteur :

$$\underline{R}_c^T [\underline{G}_r^T \underline{f}_c + \underline{h}_r]$$

Si aucune composante du vecteur $\underline{r}$ de commande n'est en contrainte pour $a = t$, alors le crochet est nul. En effet, en l'absence de contrainte, pour obtenir $\underline{r}(t, \underline{c})$, il suffit de dériver l'équation (3) et d'annuler cette dérivée qui est justement le terme entre crochet.

Supposons maintenant qu'une composante du vecteur de commande soit sur la butée, sans que les autres n'y soient. Par exemple :

$$r_j(t, \underline{c}) = M_j$$

Or :

$$\underline{R}_c = \left[\frac{\partial r_i}{\partial c_k} \right] \quad \text{si } r_j = M_j, \text{ alors la } j^{\text{ième}} \text{ ligne de } \underline{R}_c \text{ est formée de 0.}$$

$$R_c = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & x \end{bmatrix} \quad j^{\text{ième}} \text{ ligne}$$

Mais, par contre, pour obtenir les autres composantes de $\underline{r}$, il faut annuler toutes les autres composantes du vecteur $G_r^T \underline{f}_c + \underline{h}_r$.

$$G_r^T \underline{f}_c + \underline{h}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \quad j^{\text{ième}} \text{ composante}$$

Par suite, le produit $R_c^T [G_r^T \underline{f}_c + \underline{h}_r]$ est nul. Ce résultat se généralise évidemment quel que soit le nombre de composantes du vecteur de commande ayant atteint leur butée.

Si bien que nous aurons dans tous les cas :

$$R_c^T [G_r^T \underline{f}_c + \underline{h}_r] = 0$$

On en déduit donc :

$$-\dot{\underline{\lambda}}(t, t, \underline{c}) = \underline{W}(t, t, \underline{c})$$

Notre seconde proposition se trouve donc démontrée.

2,33 - Montrons que la condition de transversalité est bien vérifiée :

$$\underline{\lambda}(T) = 0 \quad (16)$$

Rappelons que (17) s'écrit :

$$\underline{\lambda}_a(t, a, \underline{c}) + \Lambda_c(t, a, \underline{c}) \underline{g}(\underline{c}, \underline{r}(a, \underline{c})) = 0 \quad (17)$$

soit encore pour $t = T$:

$$\underline{\lambda}_a(T, a, \underline{c}) + \Lambda_c(T, a, \underline{c}) \underline{g}[\underline{c}, \underline{r}(T, \underline{c})] = 0 \quad (27)$$

$$\underline{\lambda}(T, T, \underline{c}) = \underline{f}_c(T, \underline{c})$$

D'après (4) :

$$\underline{f}(T, \underline{c}) = 0 \quad \forall \underline{c}$$

$$\text{Donc : } \underline{\lambda}(T, T, \underline{c}) = 0 \quad \forall \underline{c}$$

La solution de (27) étant unique, on aura donc :

$$\underline{\lambda}(T, a, \underline{c}) = 0$$

ce qui démontre bien (16).

2,34 - L'hamiltonien est-il minimum pour $\underline{W} = \underline{y}(t, a, \underline{c})$?

c'est-à-dire :

$$\min_{\underline{W} \leq \underline{M}} H(\underline{x}, \underline{W}, \underline{\lambda}) \stackrel{?}{=} H(\underline{x}, \underline{y}, \underline{\lambda})$$

Montrons, tout d'abord, que $\underline{\lambda}(t, a, \underline{c}) = \underline{f}_x[t, \underline{x}(t, a, \underline{c})]$

(Ce résultat est immédiat si l'on considère que $(t, \underline{x})$ est une valeur particulière de $[t, \underline{c}]$.)

Posons $\underline{U}(t, a, \underline{c}) = \underline{f}_x(t, \underline{x}(t, a, \underline{c}))$ et calculons $\underline{U}_a(t, a, \underline{c})$ et $\underline{U}_c(t, a, \underline{c})$.

$$\underline{U}_a(t, a, \underline{c}) = F_{xx} \underline{x}_a \quad \underline{U}_c = F_{xx} \underline{x}_c$$

ce qui, à l'aide de (8), entraîne :

$$\underline{U}_a(t, a, \underline{c}) + \underline{U}_c(t, a, \underline{c}) \underline{g}[c, \underline{r}(a, \underline{c})] = 0 \quad (28)$$

$$\underline{U}(t, t, \underline{c}) = \underline{f}_c[t, \underline{x}(t, t, \underline{c})]$$

soit encore :

$$\underline{U}(t, t, \underline{c}) = \underline{f}_c(t, \underline{c}) \quad (29)$$

(28) et sa condition initiale (29) sont identiques à (17) et (18), ce qui démontre bien le résultat.

Il en résulte que l'on peut alors écrire :

$$H(\underline{x}, \underline{W}, \underline{\lambda}) = h(\underline{x}, \underline{W}) + \underline{g}^T(\underline{x}, \underline{W}) \underline{f}_x(t, \underline{x}) \quad (30)$$

D'après (5), nous avons :

$$\underline{W}_{\min} = \underline{r}(a, \underline{c}) \quad \text{avec} \quad \underline{W} \leq \underline{M}$$

Il en résulte que (30) est donc minimum pour :

$$\underline{W} = \underline{r}[t, \underline{x}(t, a, \underline{c})]$$

Pour que (12) soit démontrée, il suffit donc que :

$$\underline{y}(t, a, \underline{c}) = \underline{r}[t, \underline{x}(t, a, \underline{c})]$$

Ce résultat est immédiat ; il suffit de remarquer que $(t, \underline{x})$ est une valeur particulière de $(a, \underline{c})$. On pourrait également montrer que l'équation différentielle régissant $\underline{r}(t, \underline{x}(t, a, \underline{c}))$ est identique à (9) et que sa valeur initiale est (11).

Ce dernier résultat termine donc la démonstration que nous nous proposons de faire : le système de CAUCHY formé par les équations d'Immersion Invariante est équivalent au problème à valeurs limites en deux points, issu de l'application de la théorie de PONTRYAGIN. Cette dernière ayant reçu des justifications par ailleurs, les équations d'Immersion Invariante se trouvent par là même validées.

2,4 - Les équations dans le cas discret

Les équations dans le cas discret ont déjà été établies dans le cas d'un problème monovariable non contraint. Nous venons de constater sur le cas continu que la démarche en présence de butée sur la commande ne présente aucune différence. Aussi, allons-nous simplement préciser les hypothèses et les notations et donner directement les résultats.

Considérons donc un système complètement commandable à n états et m commandes, éventuellement non stationnaire, dont la représentation discrète est donnée sous la forme :

$$\underline{x}(k+1) = \underline{g}(\underline{x}(k), \underline{y}(k), k) \quad 0 \leq k \leq K \quad (31)$$

et dont les conditions initiales sont $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$.

Le vecteur de commande étant restreint par une inégalité de la forme $\underline{y}(k) \leq \underline{M}$.

On définit un critère de performance :

$$J = \sum_{k=0}^K h(\underline{x}(k), \underline{y}(k), k) \quad (32)$$

$$\underline{y}(k) \leq \underline{M}$$

Le problème est alors :

Connaissant les conditions initiales, déterminer la loi de commande, telle que le critère J soit minimum.

Pour traiter ce problème, on le range dans l'ensemble des problèmes pour lesquels :

- l'instant final est fixé, K
- l'instant initial est p , $0 \leq p \leq k \leq K$
- la condition initiale $\underline{x}(p) = \underline{c}$
- le critère de performance : $\sum_p^K h(\underline{x}(k), \underline{y}(k), k)$
 $\underline{y}(K) \leq \underline{M}$

La première équation de l'Immersion Invariante est alors l'équation de la programmation dynamique qui s'écrit :

$$f(p, \underline{c}) = \min_{\underline{W} \leq \underline{M}} [h(\underline{c}, \underline{W}, p) + f(p+1, \underline{g}(\underline{c}, \underline{W}, p))] \quad 0 \leq p \leq K-1 \quad (33)$$

et dont la condition finale est :

$$f(K, \underline{c}) = \min_{\underline{W} \leq \underline{M}} [h(\underline{c}, \underline{W}, K)] \quad (34)$$

Pour tenir compte de toutes les variables dont dépendent $\underline{x}$ et $\underline{y}$, on note alors :

$$\underline{x} = \underline{x}(k, p, \underline{c}) \quad (35)$$

$$\underline{y} = \underline{y}(k, p, \underline{c}) \quad (36)$$

Posons :

$$\underline{W}_{\min} = \underline{r}(p, \underline{c}) \quad (37)$$

Les équations complémentaires sont alors obtenues en appliquant le principe d'invariance.

Soit :

$$\underline{x}(k, p, \underline{c}) = \underline{x}[k, p+1, \underline{g}[\underline{c}, \underline{r}(p, \underline{c}), p]] \quad 0 \leq p \leq k-1 \quad (38)$$

$$\underline{x}(k, k, \underline{c}) = \underline{c} \quad (40)$$

$$\underline{y}(k, p, \underline{c}) = \underline{y}[k, p+1, \underline{g}[\underline{c}, \underline{r}(p, \underline{c}), p]] \quad 0 \leq p \leq k-1 \quad (39)$$

$$\underline{y}(k, k, \underline{c}) = \underline{r}(k, \underline{c}) \quad (41)$$

(33), (38) et (39) munies des conditions finales (34), (40) et (41) constituent donc les équations du système de CAUCHY, dérivé du problème de contrôle dans le cas discret.

3 - CA DES SYSTEMES LINEAIRES NON CONTRAINTS MUNIT DE CRITERE QUADRATIQUE -

3,1 - Introduction

Que la représentation du système soit donnée sous forme continue ou sous forme discrète, nous n'avons eu recours, pour établir les équations du problème le CAUCHY dérivant du problème de contrôle optimal, qu'à l'application de deux principes :

- principe d'optimalité conduisant à l'équation de programmation dynamique,
- principe d'invariance des trajectoires conduisant aux équations complémentaires de l'Immersion Invariante.

Or, un résultat connu de la programmation dynamique est que, dans le cas de l'optimisation quadratique des systèmes linéaires non contraints, l'équation différentielle partielle se réduit à une équation ordinaire du type RICCATI. Si nous envisageons le même problème, nous allons retrouver cette simplification, mais il est, en outre, probable qu'elle entraînera également une simplification des équations complémentaires qui permettent de calculer l'état et la commande.

Ce sont ces simplifications que nous nous proposons maintenant de mettre en évidence, d'une part, de manière théorique, d'autre part, sur un exemple.

3,2 - Optimalisation quadratique d'un système linéaire non contraint

3,21 - Cas continu

Soit, donc, la représentation d'état d'un système linéaire multivariable, d'ordre n , suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A \underline{x} + B \underline{y} & 0 \leq t \leq T \\ A_{(n \times n)} & \quad B_{(n \times m)} \end{aligned}$$

dont les conditions initiales sont : $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$

Le critère de performance quadratique est pris de la forme :

$$J = \int_0^T h(\underline{x}, \underline{y}) \, dt = \frac{1}{2} \int_0^T (\underline{x}^T Q \underline{x} + \underline{y}^T R \underline{y}) \, dt$$

Q et R étant les matrices de pondération classiques des critères quadratiques.

$Q_{n \times n}$ matrice carrée symétrique, semi définie positive

$R_{m \times m}$ matrice carrée symétrique, définie positive

Nous ne reviendrons pas sur la reformulation du problème, liée à l'approche particulière liée à l'Immersion Invariante, et nous nous bornerons à voir comment les résultats établis au paragraphe II-2 se transforment.

Equation de la programmation dynamique :

$$- f_a(a, \underline{c}) = \min_{\underline{W}} [h(\underline{c}, \underline{W}) + \underline{g}^T(\underline{c}, \underline{W}) \underline{f}_c(a, \underline{c})] \quad (1)$$

$$\underline{W}_{\min} = \underline{r}(a, \underline{c})$$

qui peut maintenant s'écrire :

$$- f_a(a, \underline{c}) = \min_{\underline{W}} \left[\frac{1}{2} \underline{c}^T Q \underline{c} + \frac{1}{2} \underline{W}^T R \underline{W} + (\underline{A} \underline{c} + \underline{B} \underline{W})^T \underline{f}_c(a, \underline{c}) \right] \quad (2)$$

En l'absence de contrainte, la recherche du minimum du crochet de droite conduit à annuler sa dérivée par rapport à $\underline{W}$; soit :

$$R \underline{W} + \underline{B}^T \underline{f}_c(a, \underline{c}) = 0$$

La dérivée seconde par rapport à $\underline{W}$ est R , par hypothèse définie positive, on a donc bien un minimum. R définie positive est également inversible. On en tire donc :

$$\underline{W}_{\min} = \underline{r}(a, \underline{c}) = - R^{-1} \underline{B}^T \underline{f}_c(a, \underline{c})$$

soit, en portant dans (2) :

$$- f_a(a, \underline{c}) = \frac{1}{2} \underline{c}^T Q \underline{c} - \frac{1}{2} \underline{f}_c^T \underline{B} R^{-1} \underline{B}^T \underline{f}_c + \underline{c}^T \underline{A}^T \underline{f}_c \quad (3)$$

La simplification de (3) vient alors du fait que, critère quadratique et système linéaire, entraînent que le coût optimal est une fonction quadratique des conditions initiales.

Posons donc :

$$f(a, \underline{c}) = \frac{1}{2} \underline{c}^T K(a) \underline{c}$$

Cette écriture suppose que $K(a)$ est semi définie positive, symétrique (en effet, le coût, scalaire, est égal à son transposé, ce qui entraîne $K(a) = K^T(a)$).

On en tire alors :

$$f_a(a, \underline{c}) = \frac{1}{2} \underline{c}^T K(a) \underline{c}$$

$$\underline{f}_c(a, \underline{c}) = K(a) \underline{c}$$

En portant ces deux valeurs dans (3), il vient :

$$-\frac{1}{2} \underline{c}^T K_a(a) \underline{c} = \frac{1}{2} \underline{c}^T Q \underline{c} - \frac{1}{2} \underline{c}^T K^T B R^{-1} B^T K \underline{c} + \underline{c}^T A^T K \underline{c}$$

En tenant compte de la symétrie de $K(a)$:

$$A^T K = \frac{1}{2} (A^T K + K A)$$

De plus :

$$R = R^T \Rightarrow R^{-1} = R^{-1T}$$

Finalement $K(a)$ est solution de l'équation différentielle :

$$-K_a(a) = Q - K(a) B R^{-1} B^T K(a) + A^T K(a) + K(a) A \quad (4)$$

Equation différentielle de RICCATI dont on connaît la condition finale :

$$f(T, \underline{c}) = 0 \quad \forall \underline{c}$$

$$\text{qui entraîne :} \quad K(T) = 0 \quad (5)$$

Reprenons maintenant l'équation partielle relative à l'état $\underline{x}$ du système :

$$\underline{x}_a(t, a, \underline{c}) + \underline{x}_c(t, a, \underline{c}) \underline{g}(\underline{c}, \underline{r}(a, \underline{c})) = 0 \quad (6)$$

$$\underline{x}(t, t, \underline{c}) = \underline{c} \quad (7)$$

Cette relation exprimant l'invariance :

$$\underline{x}(t, a, \underline{c}) = \underline{x}[t, a+\Delta, \underline{x}(a+\Delta)]$$

$\underline{x}(a+\Delta)$ étant le point déduit de $\underline{c}$ par application de $\underline{r}(a, \underline{c})$ pendant Δ .

$$\begin{aligned} \underline{x}(a+\Delta) &= \underline{c} + \underline{g}(\underline{c}, \underline{r}(a, \underline{c}))\Delta \\ &= \underline{c} + [A \underline{c} + B \underline{r}(a, \underline{c})]\Delta \end{aligned}$$

avec, maintenant :

$$\underline{r}(a, \underline{c}) = -R^{-1} B^T \underline{f}_c = -R^{-1} B^T K(a) \underline{c}$$

D'où l'on tire :

$$\underline{x}(a+\Delta) = \underline{c} + [A - B R^{-1} B^T K(a)] \Delta \underline{c}$$

Donc $\underline{x}(a+\Delta)$ dépend de manière linéaire de $\underline{x}(a) = \underline{c}$.

Il en résulte que $\underline{x}(t, a, \underline{c})$ dépend de manière linéaire de la condition initiale $\underline{c}$.

Pour traduire cette dépendance, nous noterons :

$$\underline{x}(t, a, \underline{c}) = \Omega(a) \underline{c} \quad (8)$$

Nous ne faisons pas apparaître l'argument t dans Ω , car la relation (6) est écrite à t fixé, $a \leq t \leq T$, les seules variables indépendantes étant a et $\underline{c}$.

De (8) on tire alors :

$$\underline{x}_a(t, a, \underline{c}) = \Omega_a(a) \underline{c}$$

$$\underline{x}_c(t, a, \underline{c}) = \Omega(a)$$

soit, en portant dans (6) et (7), les nouvelles équations :

$$\Omega_a(a) + \Omega(a) [A - B R^{-1} B^T K(a)] = 0 \quad (13)$$

$$\Omega(t) = \mathbb{I} \quad (15)$$

De la même façon, la commande est donnée par l'équation différentielle :

$$\underline{y}_a(t, a, \underline{c}) + \underline{y}_c(t, a, \underline{c}) \underline{g}(\underline{c}, \underline{r}(a, \underline{c})) = 0 \quad (9)$$

Nous avons établi en II-2,3 le résultat suivant :

$$\underline{y}(t, a, \underline{c}) = \underline{r}[t, \underline{x}(t, a, \underline{c})]$$

Or, nous venons d'explicitier $\underline{r}(a, \underline{c})$:

$$\underline{r}(a, \underline{c}) = - R^{-1} B^T K(a) \underline{c}$$

D'où l'on tire :

$$\underline{y}(t, a, \underline{c}) = - R^{-1} B^T K(t) \Omega(a) \underline{c} \quad (10)$$

(10) exprime donc que la commande $\underline{y}(t, a, \underline{c})$:

- est une commande en boucle fermée
- dépend linéairement de la condition initiale $\underline{c}$

Posons donc :

$$\underline{y}(t, a, \underline{c}) = U(a) \underline{c}$$

D'où l'on tire :

$$\underline{y}_a(t, a, c) = U_a(a) \underline{c}$$

$$\underline{Y}_c = U(a)$$

soit, en portant dans (9) :

$$U_a(a) + U(a) [A - B R^{-1} B^T K(a)] = 0 \quad (14)$$

La condition initiale sur $\underline{y}$ étant :

$$\underline{y}(t, t, \underline{c}) = \underline{r}(t, \underline{c})$$

on en tire :

$$U(t) = - R^{-1} B^T K(t) \quad (16)$$

Lorsque le critère est quadratique et le système linéaire, les nouvelles équations liées à l'approche par Immersion Invariante sont donc les suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A \underline{x} + B \underline{y} \\ J &= \frac{1}{2} \int_0^T (\underline{x}^T Q \underline{x} + \underline{y}^T R \underline{y}) dt \end{aligned}$$

Equation de la programmation dynamique :

$$\begin{aligned} f(a, \underline{c}) &= \frac{1}{2} \underline{c}^T K(a) \underline{c} \\ \forall \underline{c} \begin{cases} -K_a(a) = Q - K(a) B R^{-1} B^T K(a) + A^T K(a) + K(a) A \\ K(T) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{matrix} (4) \\ (5) \end{matrix}$$

Equations complémentaires :

$$\begin{aligned} \underline{x}(t, a, \underline{c}) &= \Omega(a) \underline{c} \\ \underline{y}(t, a, \underline{c}) &= U(a) \underline{c} \\ \Omega_a(a) + \Omega(a) [A - B R^{-1} B^T K(a)] &= 0 \quad (13) \\ U_a(a) + U(a) [A - B R^{-1} B^T K(a)] &= 0 \quad (14) \\ \Omega(t) &= \mathbb{I} \quad (15) \\ U(t) &= - R^{-1} B^T K(t) \quad (16) \end{aligned}$$

(4) mais aussi (13) et (14) sont donc maintenant des équations différentielles ordinaires.

Sur le plan pratique, le schéma de l'intégration reste le même :

- (4) est intégré à rebours de T vers a, à partir de la condition finale (5).

- Pour chacun des points à calculer sur les trajectoires, on adjoint un système complémentaire. Les équations (13) et (14) sont alors intégrées simultanément à (4) à partir des conditions finales (15) et (16).

- L'ensemble des résultats est obtenu en fin de balayage.

3,22 - Cas discret

Récapitulons les résultats obtenus dans le cas général lorsque la représentation du système est donnée sous forme discrète :

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = \underline{g}[\underline{x}(k), \underline{y}(k)] & 0 \leq k \leq K \\ J = \sum_{k=0}^K h[\underline{x}(k), \underline{y}(k)] \end{cases}$$

Equation de la programmation dynamique :

$$f(p, \underline{c}) = \min_{\underline{W}} [h(\underline{c}, \underline{W}) + f(p+1, \underline{g}(\underline{c}, \underline{W}))] ; 0 \leq p \leq K-1$$

$$f(K, \underline{c}) = \min_{\underline{W}} [h(\underline{c}, \underline{W})]$$

$$\underline{W}_{\min} = \underline{r}(p, \underline{c})$$

Equations complémentaires :

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}(k, p, \underline{c}) &= \underline{x}[k, p+1, \underline{g}(\underline{c}, \underline{r}(p, \underline{c}))] \\ \underline{x}(k, k, \underline{c}) &= \underline{c} \\ \underline{y}(k, p, \underline{c}) &= \underline{y}[k, p+1, \underline{g}(\underline{c}, \underline{r}(p, \underline{c}))] \\ \underline{y}(k, k, \underline{c}) &= \underline{r}(k, \underline{c}) \end{aligned} \right\} 0 \leq p \leq k-1$$

Envisageons maintenant le système linéaire décrit par :

$$\underline{x}(k+1) = \underline{g}[\underline{x}(k), \underline{y}(k)] = A(k) \underline{x}(k) + B(k) \underline{y}(k)$$

$$\underline{x}(p) = \underline{c} \quad 0 \leq p \leq K$$

et muni du critère quadratique :

$$J = \sum_{k=0}^K [\underline{x}^T(k) Q(k) \underline{x}(k) + \underline{y}^T(k) R(k) \underline{y}(k)]$$

La séparation des variables dans le coût optimal nous conduit alors à poser :

$$f(p, \underline{c}) = \underline{c}^T P(p) \underline{c}$$

Comme pour le cas continu, en l'absence de contraintes, la minimisation dans l'équation de programmation dynamique est obtenue par dérivation.

Ce qui entraîne :

$$\underline{W}_{\min} = \underline{r}(p, \underline{c}) = - [R(p) + B^T(p) P(p+1) B(p)]^{-1} [B^T(p) P(p+1) A(p)] \underline{c}$$

$P(p)$ est alors solution de l'équation récurrente suivante :

$$P(p) = Q(p) + A^T(p) P(p+1) A(p) - A^T(p) P(p+1) B(p) [R(p) + B^T(p) P(p+1) B(p)]^{-1} B^T(p) P(p+1) A(p) \quad (17)$$

$$0 \leq p \leq K-1$$

dont la condition finale est donnée par :

$$P(K) = Q(K) \quad (18)$$

Commande et état étant des fonctions linéaires de la condition initiale, on pose alors :

$$\underline{y}(k, p, \underline{c}) = U(p) \underline{c}$$

$$\underline{x}(k, p, \underline{c}) = \Omega(p) \underline{c}$$

et, en portant dans les équations d'invariance, il vient pour $0 \leq p \leq k-1$:

$$\Omega(p) = \Omega(p+1) [A(p) - B(p) [R(p) + B^T(p) P(p+1) B(p)]^{-1} B^T(p) P(p+1) A(p)] \quad (19)$$

tandis que pour $p = k$, la condition finale est :

$$\Omega(k) = \mathbb{I} \quad (20)$$

De même, pour $0 \leq p \leq k-1$:

$$U(p) = U(p+1) [A(p) - B(p) [R(p) + B^T(p) P(p+1) B(p)]^{-1} B^T(p) P(p+1) A(p)] \quad (21)$$

et pour $p = k$:

$$U(k) = - [R(k) + B^T(k) P(k+1) B(k)]^{-1} B^T(k) P(k+1) A(k) \quad (22)$$

La résolution de ces équations récurrentes est à calquer sur celle du cas continu. $\underline{p}$ est calculé à rebours depuis K jusqu'à l'instant initial. Pour $p = k$, on adjoint les équations en Ω et U , qui sont alors calculées simultanément jusqu'à $p = 0$. $\Omega(0)$ et $U(0)$ permettent alors d'obtenir $\underline{x}(k, 0, \underline{c})$ et $\underline{y}(k, 0, \underline{c})$ quel que soit $\underline{c}$.

3,3 - Une application élémentaire

Considérons le processus intégrateur défini par l'équation différentielle :

$$\dot{x} = y \quad \text{et la condition initiale} \quad x(a) = \underline{c}$$

et cherchons l'expression analytique de x et y , telle que le critère :

$$J = \frac{1}{2} \int_a^T (x^2 + y^2) dt$$

soit minimum.

L'équation de la programmation dynamique s'écrit :

$$-f_a(a, c) = \min_W \left[\frac{1}{2} (c^2 + W^2) + W f_c(a, c) \right]$$

On a alors :

$$W_{\min} = r(a, c) = -f_c(a, c)$$

En posant :

$$f(a, c) = \frac{1}{2} \rho(a) c^2$$

il vient :

$$\begin{aligned} -\rho_a(a) &= 1 - \rho^2(a) \\ \rho(T) &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui, en intégrant, entraîne :

$$\rho(a) = -\text{th}(a-T)$$

et par suite :

$$r(a, c) = -\rho(a) c = c \text{th}(a-T)$$

Portons cette expression dans (13), (14), (15) et (16) :

$$\Omega_a(a) + \Omega(a) \text{th}(a-T) = 0$$

$$\Omega(T) = 1$$

$$U_a(a) + U_a \operatorname{th}(a-T) = 0$$

$$U(t) = \operatorname{th}(t-T)$$

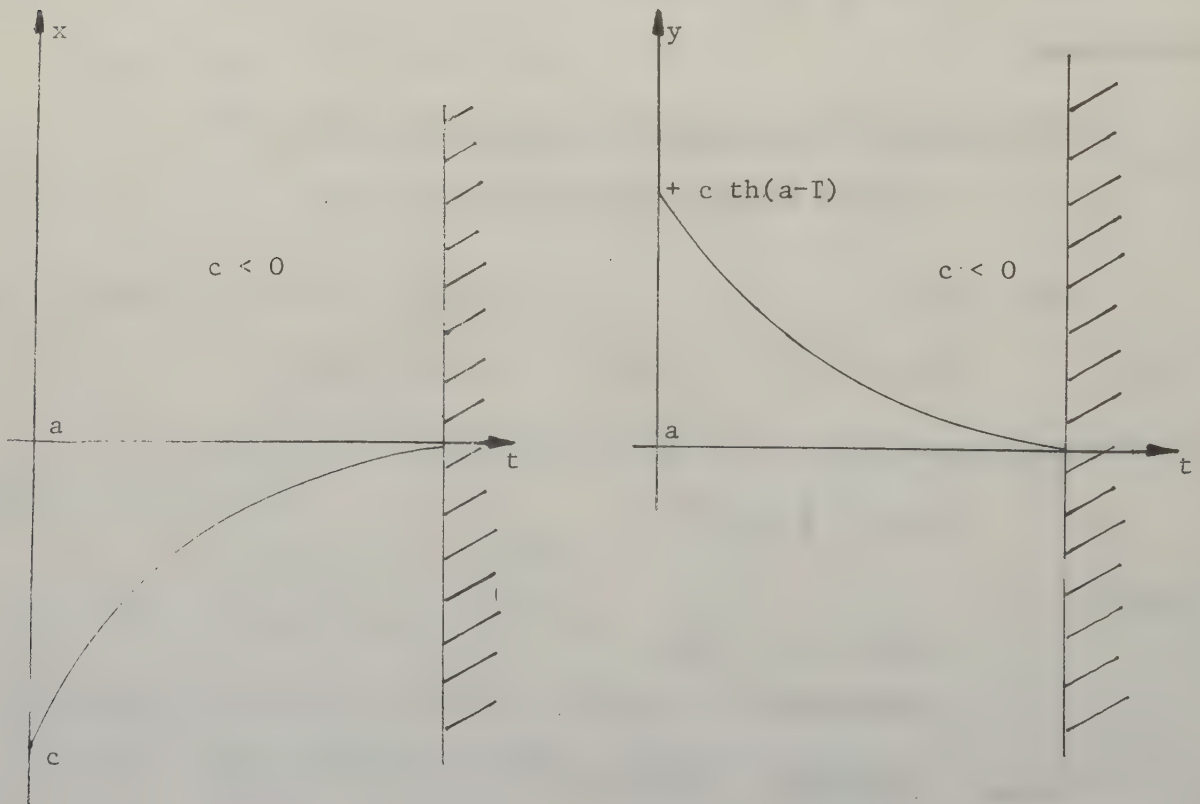
En intégrant ces équations différentielles, il vient :

$$\Omega(a) = \frac{\operatorname{ch}(t-T)}{\operatorname{ch}(a-T)}$$

$$\psi(a) = \frac{\operatorname{sh}(t-T)}{\operatorname{ch}(a-T)}$$

et, finalement, les expressions analytiques des solutions sont :

$$\begin{cases} x(t,a,c) = c \frac{\operatorname{ch}(t-T)}{\operatorname{ch}(a-T)} \\ y(t,a,c) = c \frac{\operatorname{sh}(t-T)}{\operatorname{ch}(a-T)} \end{cases}$$



4 - UNE STRATEGIE D'OPTIMALISATION POUR LES SYSTEMES MONOVARIABLES, MUNIS D'UN CRITERE QUADRATIQUE AVEC BUTEE SUR LA COMMANDE

4.1 - Introduction

La propriété de séparation des variables, que possèdent les systèmes linéaires lorsque le critère est quadratique, vient donc de nous permettre de transformer toutes les équations aux dérivées partielles du système de CAUCHY,

issu de l'Immersion Invariante, en systèmes d'équations différentielles ordinaires, munies de conditions limites en un seul point. Une telle simplification peut alors permettre d'envisager une stratégie d'optimisation en présence de saturation sur la commande. Le résultat auquel nous sommes parvenus concerne le cas monovariable, et permet d'obtenir état et commande pour tout a et tout c en présence de saturation. Sur le plan pratique, nous avons procédé par étapes en traitant tout d'abord de manière analytique un exemple élémentaire, ce qui nous a permis d'obtenir l'algorithme de résolution, puis en étendant ensuite ce premier résultat à ce cas plus général. C'est ce plan que nous nous proposons de reprendre maintenant.

4,2 - Traitement analytique d'un exemple élémentaire

Reprenons l'exemple de l'intégrateur que nous venons d'envisager, mais supposons cette fois que la commande est bornée. La formulation du problème envisagé est donc la suivante :

Pour le système décrit par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y & a \leq t < T \\ x(a) &= c & -\infty \leq c \leq +\infty \end{aligned}$$

Recherchons alors la commande et la trajectoire, optimales, qui minimisent le critère :

$$J = \frac{1}{2} \int_a^T (x^2 + y^2) dt$$

compte tenu de la butée $y \leq M$.

En l'absence de butée, commande et état étaient donnés par :

$$\begin{aligned} x(t, a, c) &= c \frac{\text{ch}(t-T)}{\text{ch}(a-T)} \\ y(t, a, c) &= c \frac{\text{sh}(t-T)}{\text{ch}(a-T)} \end{aligned}$$

avec, de plus, $r(a, c) = c \text{ th}(a-T)$.

L'allure de la loi de commande est alors donnée par la figure 1 et, intuitivement, on peut dire que, si cette commande est bornée, elle aura alors une allure donnée par la courbe en pointillés.

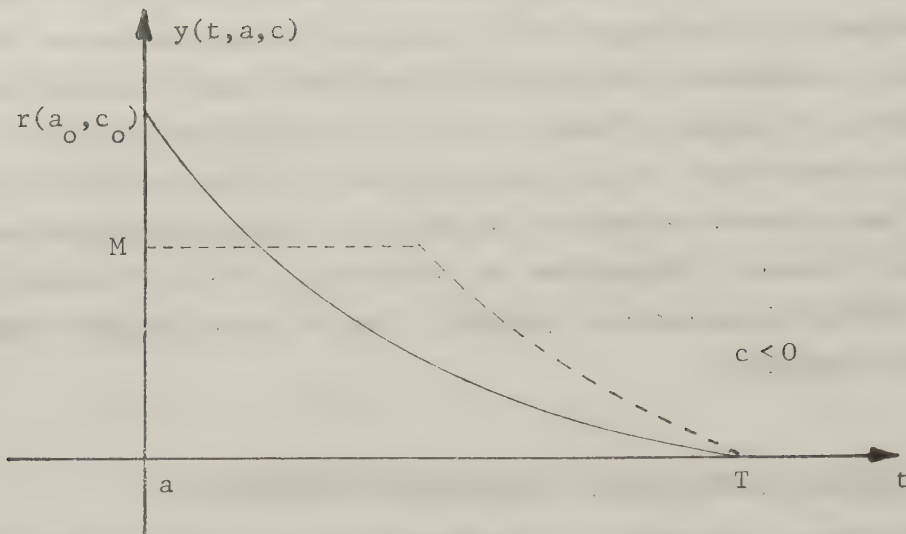


fig. 1

Si la commande $y(t, a, c)$ entre en butée, il existera donc un couple de valeurs (a_p, c_p) , $a_p \in [a_0, T]$ tel que :

$$r(a_p, c_p) = M \quad (1)$$

$$c_p \operatorname{th}(a_p - T) = M$$

Soit I la courbe du plan (a, c) définie par cette relation.

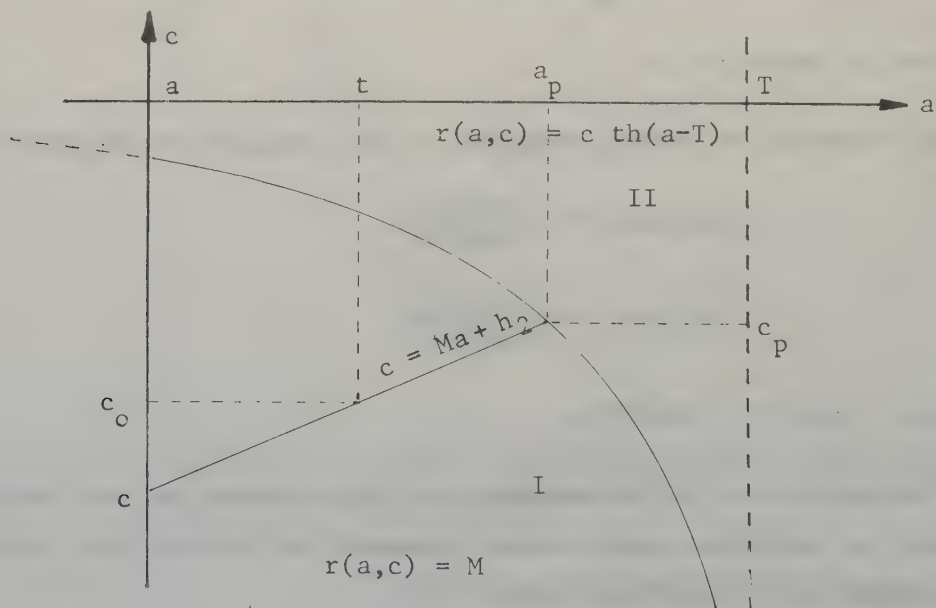


fig. 2

Dans la portion I du plan (a,c) , $c \operatorname{th}(a-T) > M$, il s'en suit que la décision optimale, compte tenu de la butée, sera :

$$r(a,c) = M$$

Dans la portion II, on a $c \operatorname{th}(a-T) < M$, on prendra donc :

$$r(a,c) = c \operatorname{th}(a-T)$$

Un couple de valeurs (a,c) , appartenant au demi plan II, correspond donc au cas où la commande n'atteint pas sa borne et, par suite, les résultats obtenus précédemment restent valides.

Supposons donc que (a,c) appartiennent au demi plan I. Alors, $r(a,c) = M$ et l'équation partielle fournissant x devient :

$$x_a(t,a,c) + M x_c(t,a,c) = 0 \quad (2)$$

dont les caractéristiques sont données par :

$$\frac{da}{1} = \frac{dc}{M} = \frac{dx}{0}$$

ce qui entraîne :

$$x = \text{const} = h_1 \quad (3)$$

$$\text{lorsque} \quad c = Ma + h_2 \quad (4)$$

Traçons sur la figure 2 la caractéristique passant par le point (a,c) et soit (a_p, c_p) son intersection avec la courbe I. On a alors :

$$c_p \operatorname{th}(a_p - T) = M \quad (5)$$

Il existe maintenant deux possibilités suivant la valeur de t par rapport à a_p , que nous allons envisager successivement.

$$4,21 - \quad a \leq t \leq a_p \leq T$$

Supposons que la caractéristique issue du point (a,c) passe également par le point (t, c_0) .

D'après la relation (3), on aura :

$$x(t,a,c) = x(t,t,c_0) = c_0$$

et, d'après (4) :

$$(c - c_0) = M(a-t)$$

D'où l'on tire :

$$c_0 = c - M(a-t)$$

et, par suite :

$$x(t, a, c) = c - M(a-t) \quad (6)$$

De la même façon, l'équation en y s'écrit :

$$y_a(t, a, c) + M y_c(t, a, c) = 0$$

ses caractéristiques étant :

$$y = \text{const pour } c = Ma + h_2$$

ce qui redonne bien :

$$y(t, a, c) = y(t, t, c_0) = r(t, c_0) = M$$

$$4,22 - a \leq a_p \leq t \leq T$$

En considérant (a_p, c_p) comme appartenant à I, on tire, d'après (3) :

$$x(t, a, c) = x(t, a_p, c_p)$$

Mais (a_p, c_p) appartiennent également à II, si bien que :

$$x(t, a, c) = c_p \frac{\text{th}(t-T)}{\text{ch}(a_p-T)}$$

D'autre part, on tire de (4) :

$$c_p = c - M(a - a_p)$$

En portant dans (5), il vient :

$$[c - M(a - a_p)] \text{th}(a_p - T) = M \quad (7)$$

a et c étant donnés, (7) permet donc de calculer a_p et, finalement, x est donné par :

$$x(t, a, c) = [c - M(a - a_p)] \frac{\text{ch}(t-T)}{\text{ch}(a_p-T)} \quad (8)$$

De la même façon, on a :

$$y(t, a, c) = \text{const pour } c = Ma + h_2$$

D'où l'on tire :

$$y(t, a, c) = y(t, a_p, c_p)$$

soit, enfin :

$$y(t, a, c) = [c - M(a - a_p)] \frac{\text{sh}(t-T)}{\text{ch}(a_p - T)} \quad (9)$$

4,3 - Recherche d'une stratégie

Au lieu de résoudre analytiquement les équations du problème précédent, il est également possible d'obtenir un système algèbre différentiel, conduisant à la solution.

Revenons au cas du problème non contraint.

En posant :

$$f(a, c) = \frac{1}{2} \rho(a) c^2$$

on tire :

$$r(a, c) = - \rho(a) c$$

soit, en portant dans l'équation en x :

$$x_a(t, a, c) - x_c(t, a, c) \rho(a) c = 0$$

et, en posant :

$$x = \omega(a) c$$

$$\omega_a(a) - \rho(a) \omega(a) = 0 \quad (10)$$

avec :

$$\omega(t) = 1$$

Rappelons également que l'équation de la programmation dynamique se réduit à une équation de RICCATI :

$$\rho_a(a) = \rho^2(a) - 1 \quad (11)$$

$$\rho(T) = 0$$

Pour résoudre le problème, il suffit alors d'intégrer (11) à rebours depuis T , puis de lui adjoindre (10) à l'instant t .

Alors, pour toute valeur $a \leq t$, on a :

$$x = \omega(a) c$$

En particulier, pour $a \leq a_p \leq t \leq T$, (8) peut aussi s'écrire :

$$x(t, a, c) = [c - M(a - a_p)] \omega(a_p) \quad (12)$$

avec :

$$[c - M(a - a_p)] \rho(a_p) = M \quad (13)$$

Donc, en même temps que l'on intègre $\rho(a)$ et $\omega(a)$, on peut également calculer :

$$\phi(\alpha) = [c - M(a - \alpha)] \rho(\alpha) \quad (14)$$

qui donnera $\phi = a_p$ lorsque $\phi(\alpha) = M$

On peut alors tirer $x(t, a, c)$ à l'aide de (12).

De même, si l'on pose :

$$y(t, a, c) = U(a) c$$

(9) peut alors s'écrire :

$$y(t, a, c) = [c - M(a - a_p)] U(a_p) \quad (15)$$

$\phi(\alpha) = M$ permet donc également de calculer y à l'aide de (15).

Par contre, si la commande rencontre sa butée, c'est-à-dire s'il existe a_p tel que $\phi(a_p) = M$, mais si $a \leq t \leq a_p \leq T$, alors les solutions seront :

$$\begin{aligned} x(t, a, c) &= c + M(t - a) \\ y(t, a, c) &= M \end{aligned} \quad \forall t \leq a_p \quad (5)$$

Finalement, sur le plan pratique, on pourra donc opérer comme suit :

- intégration à rebours de T vers a , de $\rho(a)$, et calcul simultané de $\phi(\alpha)$
- à t , adjonction des équations en $\omega(a)$, en $U(a)$ et intégration de t vers a .

$\phi(\alpha) = M$ fournira $\alpha = a_p$ s'il existe.

Les trois cas qui peuvent alors se produire sont résumés dans le tableau ci-après.

	$a_p \notin [a, T]$	$a_p \in [a, t]$	$a_p \in [t, T]$
$x(t, a, c)$	$\omega(a) \underline{c}$	$[c - M(a - a_p)] \omega(a_p)$	$c + M(t - a)$
$y(t, a, c)$	$U(a) \underline{c}$	$[c - M(a - a_p)] U(a_p)$	M

4,4 - Généralisation aux systèmes monovariabiles d'ordre n

4,41 - Lorsque $y(t, a, c)$ n'atteint pas sa butée, $\forall t, \in [a, T]$, les résultats sont ceux du problème non contraint, exposés en II - 3,3, que nous allons rappeler :

$$\begin{aligned}
 f(a, c) &= \frac{1}{2} \underline{c}^T K(a) \underline{c} \\
 -K_a(a) &= Q - \frac{1}{\alpha^2} K(a) \underline{b} \underline{b}^T K(a) + A^T K(a) + K(a) A \\
 K(T) &= 0 \\
 r(a, \underline{c}) &= \frac{1}{\alpha^2} \underline{b}^T K(a) \underline{c} \\
 \underline{x}(t, a, c) &= \Omega(a) \underline{c} \\
 \Omega_a(a) &= -\Omega(a) \left[A - \frac{1}{\alpha^2} \underline{b} \underline{b}^T K(a) \right] \\
 \Omega(t) &= \mathbb{I} \\
 y(t, a, \underline{c}) &= \underline{U}^T(a) \underline{c} \\
 \underline{U}_a(a) &= - \left[A - \frac{1}{\alpha^2} \underline{b} \underline{b}^T K(a) \right]^T \underline{U}(a) \\
 U(t) &= - \frac{1}{\alpha^2} K(t) \underline{b}
 \end{aligned}$$

4,42 - Supposons maintenant que la butée est atteinte, c'est-à-dire qu'il existe a et $\underline{c}$ tels que :

$$y(a, a, \underline{c}) = M$$

Comme précédemment, des considérations physiques nous laissent supposer que, si la commande y atteint la butée, elle le fait dès le départ.

Soit a_p tel que $r(a_p, \underline{c}_p) = M$, c'est-à-dire tel que :

$$- \frac{1}{\alpha^2} \underline{b}^T K(a_p) \underline{c}_p = M \quad (16)$$

Cette relation fournira a_p , à condition que $\underline{c}_p$ soit connu.

- Soit t tel que $a \leq a_p \leq t \leq T$

L'équation partielle en $\underline{x}$ s'écrit alors :

$$\underline{x}_a + \underline{X}_c [\underline{A} \underline{c} + \underline{b} \underline{M}] = 0$$

et ses caractéristiques sont :

$$\underline{x}(t, a, c) = \text{constante pour :}$$

$$\frac{dc}{da} = \underline{A} \underline{c} + \underline{b} \underline{M} \quad (17)$$

qui est analogue à :

$$\dot{\underline{z}}(t) = \underline{A} \underline{z}(t) + \underline{b} \underline{M}$$

Soit $\Phi(t, \tau)$ la matrice de transition de $\dot{\underline{z}} = \underline{A} \underline{z}$. Les homologues des équations (6) sont :

$$\underline{c}_p = \Phi(a_p, a) \underline{c} + \int_a^{a_p} \Phi(a_p, \alpha) \underline{b} \underline{M} d\alpha \quad (18)$$

$$\underline{c}_0 = \Phi(t, a) \underline{c} + \int_a^t \Phi(t, \alpha) \underline{b} \underline{M} d\alpha \quad (19)$$

Or, d'après (17) :

$$\begin{aligned} \underline{x}(t, a, \underline{c}) &= \underline{x}(t, a_p, \underline{c}_p) \\ &= \Omega(a_p) \underline{c}_p \end{aligned} \quad (20)$$

De la même façon, pour la commande on aura :

$$\underline{y}_a + \underline{y}_c^T [\underline{A} \underline{c} + \underline{b} \underline{M}] = 0$$

qui a pour caractéristiques :

$$\underline{y}(t, a, \underline{c}) = \text{constante pour } \underline{c}_a = \underline{A} \underline{c} + \underline{b} \underline{M}$$

D'où finalement :

$$\underline{y}(t, a, \underline{c}) = \underline{y}(t, a_p, \underline{c}_p) = \underline{U}^T(a_p) \underline{c}_p$$

- Soit maintenant t tel que $a \leq t \leq a_p \leq T$, on aura alors :

$$\underline{y}(t, a, \underline{c}) = \underline{M}$$

et, d'après (17) :

$$\underline{x}(t, a, c) = \underline{x}(t, t, \underline{c}_0)$$

soit :

$$\underline{x}(t, a, \underline{c}) = \underline{c}_0$$

$\underline{c}_0$ étant donné par (19).

4,43 - Finalement, si a_p existe, il est donné par :

$$-\frac{1}{\alpha^2} \underline{b}^T K(a_p) \underline{c}_p = M$$

avec :

$$\underline{c}_p = \Phi(a_p, a) \underline{c} + \int_a^{a_p} \Phi(a_p, \alpha) \underline{b} M d\alpha$$

et les résultats globaux peuvent être concentrés dans le tableau suivant :

	$a_p \notin [a, T]$	$a_p \in [t, T]$	$a_p \in [a, t]$
$\underline{x}(t, a, c)$	$\Omega(a) \underline{c}$	$\underline{c}_0$	$\Omega(a_p) \underline{c}_p$
$y(t, a, c)$	$\underline{U}^T(a) \underline{c}$	M	$\underline{U}^T(a_p) \underline{c}_p$

Dans le cas d'un système monovariable muni d'un critère quadratique, un même programme permettra donc d'obtenir les trajectoires optimales, que l'on soit en présence de butée sur la commande ou non.

Pour tenir compte d'une éventuelle butée sur la commande, il faudra que le programme calcule en permanence une relation du type (16), qui permet de déterminer l'instant où la commande sort de butée. Mais ceci suppose toutefois que l'on effectue également le calcul de la matrice de transition du système.

5 - MISE EN OEUVRE PRATIQUE -

5,1 - Introduction

Les exemples que nous allons traiter concernent tous l'optimisation quadratique de systèmes linéaires, et nous aborderons successivement des problèmes non contraints et des problèmes où le vecteur de commande est restreint par une contrainte inégalité.

Dans chacun de ces types de problème, nous examinerons le cas général où les équations dues à l'Immersion Invariante sont des équations aux dérivées

partielles et les cas simplifiés que nous avons pu mettre en évidence en exploitant des propriétés telles que la linéarité du système.

Les exemples traités ont été choisis volontairement très simples, afin qu'il soit aisé de dégager les caractéristiques essentielles du traitement numérique des équations de l'Immersion Invariante : difficultés de mise en oeuvre, avantages par rapport aux méthodes de résolution classiques, limites, ...

Dans les cas simplifiés, comme dans le cas général, le schéma de résolution reste le même et nous allons encore le rappeler :

- Intégration à rebours de l'équation de programmation dynamique (de T vers a), avec comme condition finale la solution triviale du problème de durée nulle ($f(T, \underline{c}) = 0$).

- Pour tous les instants $t_i \in [a, T]$ où l'on désire connaître des points sur les trajectoires optimales, adjonction d'équations différentielles complémentaires, pour une intégration à rebours simultanée à la précédente.

- L'ensemble des résultats, théoriquement obtenu en un seul balayage, est obtenu à la fin des intégrations.

5,2 - Systèmes linéaires non contraints

5,21 - Cas général

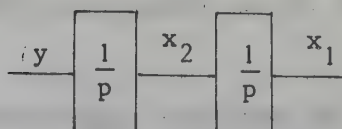
Les équations à résoudre dans le cas général sont des équations aux dérivées partielles, pour lesquelles les difficultés de l'intégration numérique vont de pair avec le nombre des variables indépendantes.

Nous nous sommes donc restreints ici à un système simple d'ordre peu élevé, pour lequel les solutions optimales sont bien connues.

Le programme réalisé est spécifique du problème traité et ne possède aucun caractère de généralité.

Le processus envisagé est constitué par un double intégrateur et se trouve décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = y \end{cases}$$



L'état x_1 étant considéré comme la sortie du système, nous avons choisi un critère quadratique de la forme :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (x_1^2 + \alpha^2 y^2) dt$$

et par référence à un problème pratique déjà envisagé au Laboratoire d'Automatique, nous avons pris :

$$T = 80 \text{ s} \quad \alpha^2 = 75$$

domaine de variation de x_1 : $[-3 ; +3]$

domaine de variation de x_2 : $[-3 ; +3]$

Pour ce problème de commande, l'équation de programmation dynamique s'écrit :

$$-f_a(a, \underline{c}) = \min_W \left[\frac{1}{2} (c_1^2 + \alpha^2 W^2) + c_2 f_{c_1} + W f_{c_2} \right]$$

En l'absence de contrainte, le minimum est obtenu par dérivation, ce qui conduit à :

$$W_{\min} = - \frac{f_{c_2}}{\alpha^2}$$

et, finalement, l'ensemble des équations à intégrer est le suivant :

$$-f_a(a, \underline{c}) = \frac{c_1^2}{2} + c_2 f_{c_1} - \frac{f_{c_2}^2}{2\alpha^2} \quad (1)$$

$$f(T, \underline{c}) = 0 \quad (2)$$

Equations complémentaires :

$$x_1 a + c_2 x_1 c_1 - \frac{f_{c_2}}{\alpha^2} x_1 c_2 = 0 \quad (4)$$

$$x_2 a + c_2 x_2 c_2 - \frac{f_{c_2}}{\alpha^2} x_2 c_2 = 0 \quad (5)$$

$$y_a + y_{c_1} c_2 - \frac{f_{c_2}}{\alpha^2} y_{c_2} = 0 \quad (6)$$

$$x_1(t, t, \underline{c}) = c_1 \quad (7)$$

$$x_2(t, t, \underline{c}) = c_2 \quad (8)$$

$$y(t, t, \underline{c}) = - \frac{f_{c_2}}{2\alpha} \quad (9)$$

Pour calculer les dérivées partielles en temps, f_a , $x_1 a$, $x_2 a$ et $y_2 a$, nous avons utilisé une méthode de différences finies.

$$f_a(a, \underline{c}) = \frac{f(a, \underline{c}) - f(a - \Delta, \underline{c})}{\Delta}$$

Par contre, pour calculer les dérivées partielles dans l'espace $\underline{c}$, nous avons utilisé successivement :

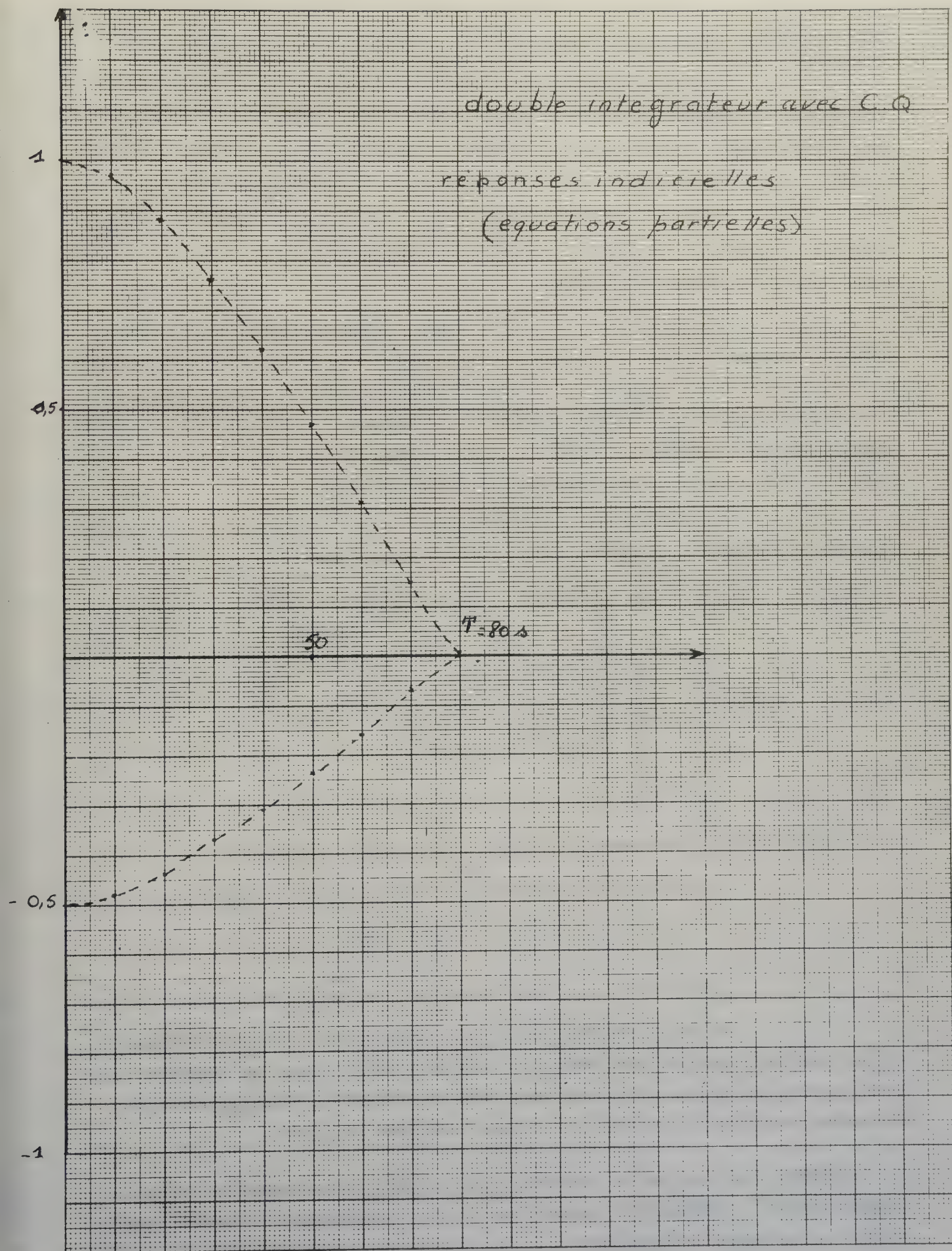
- une méthode de différences finies pour toutes les fonctions, f , x , y .

- un algorithme, combinant une méthode de différences finies, pour calculer x_c et y_c , et une méthode utilisant une approximation polynomiale de $f(a, \underline{c})$ autour de chaque valeur $\underline{c}$, pour calculer les dérivées $f_{\underline{c}}(a, \underline{c})$.

Les résultats obtenus par ces deux méthodes sont :

- d'une part, identiques entre eux,
- d'autre part, recoupent parfaitement des résultats connus obtenus en traitant le problème par le principe du minimum, même pour des pas de discrétisation assez larges.

Ceci tient évidemment du fait que, pour ce problème simple sans contrainte, les surfaces caractéristiques des équations différentielles partielles sont "parfaitement régulières".



5,22 - Algorithme simplifié

En II-3, nous avons montré que pour ce type de problèmes (optimisation quadratique de systèmes linéaires non contraints), on pouvait appliquer le principe de séparation des variables, ce qui permet de transformer les équations aux dérivées partielles en équations matricielles ordinaires.

Ces nouvelles équations présentent alors un caractère de généralité qui permet de réaliser un programme unique capable de résoudre une classe importante de problèmes de commande.

Ce programme associe à l'intégration de l'équation de RICCATI, issue de la programmation dynamique, l'intégration des équations complémentaires en $\Omega(a)$ et $U(a)$ qui permettent d'obtenir état et commande en des instants que l'on peut choisir arbitrairement sur toute la période d'optimisation. Les intégrations sont réalisées à l'aide d'un sous programme IBM 360, intitulé H.P.C.G., qui utilise une méthode du type ADAMS - MOULTON.

Les résultats numériques qui suivent concernent un système multivariable à 4 états, 2 entrées et 2 sorties, décrit par :

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{T_1} (x_2 - x_1) \quad T_1 = 20 \text{ s}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{T_2} (x_3 - x_2 + y_1) \quad T_2 = 30 \text{ s}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{T_3} (x_4 - x_3) \quad T_3 = 40 \text{ s}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{T_4} (y_2 - x_4) \quad T_4 = 50 \text{ s}$$

les états x_1 et x_3 étant considérés comme les sorties du système.

Le critère d'optimisation a été pris de la forme :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (x_1^2 + x_3^2 + \alpha^2 y_1^2 + \beta^2 y_2^2) dt$$

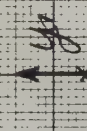
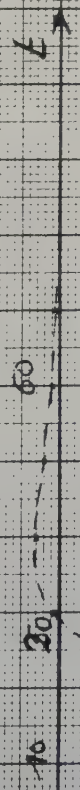
$$T = 150 \text{ s} \quad \alpha^2 = 0,025 \quad \beta^2 = 0,0115$$

En fait, ces valeurs de α et β du critère ont été déterminées [1] de manière à assurer des temps à 2 % de 50 s et 70 s sur les réponses indicielles en x_1 et x_3 , et, il s'agit pour nous de visualiser les trajectoires optimales pour vérifier si ces conditions sont bien réalisées.

[1] "Synthèse d'un système de commande multivariable fournissant un temps de réponse donné". J. DESCUSSE - Rapport de D.E.A. - Laboratoire d'Automatique de l'E.N.S.M. à Nantes (à paraître).

SYSTEME MULTIVARIABLE
(critère quadratique)

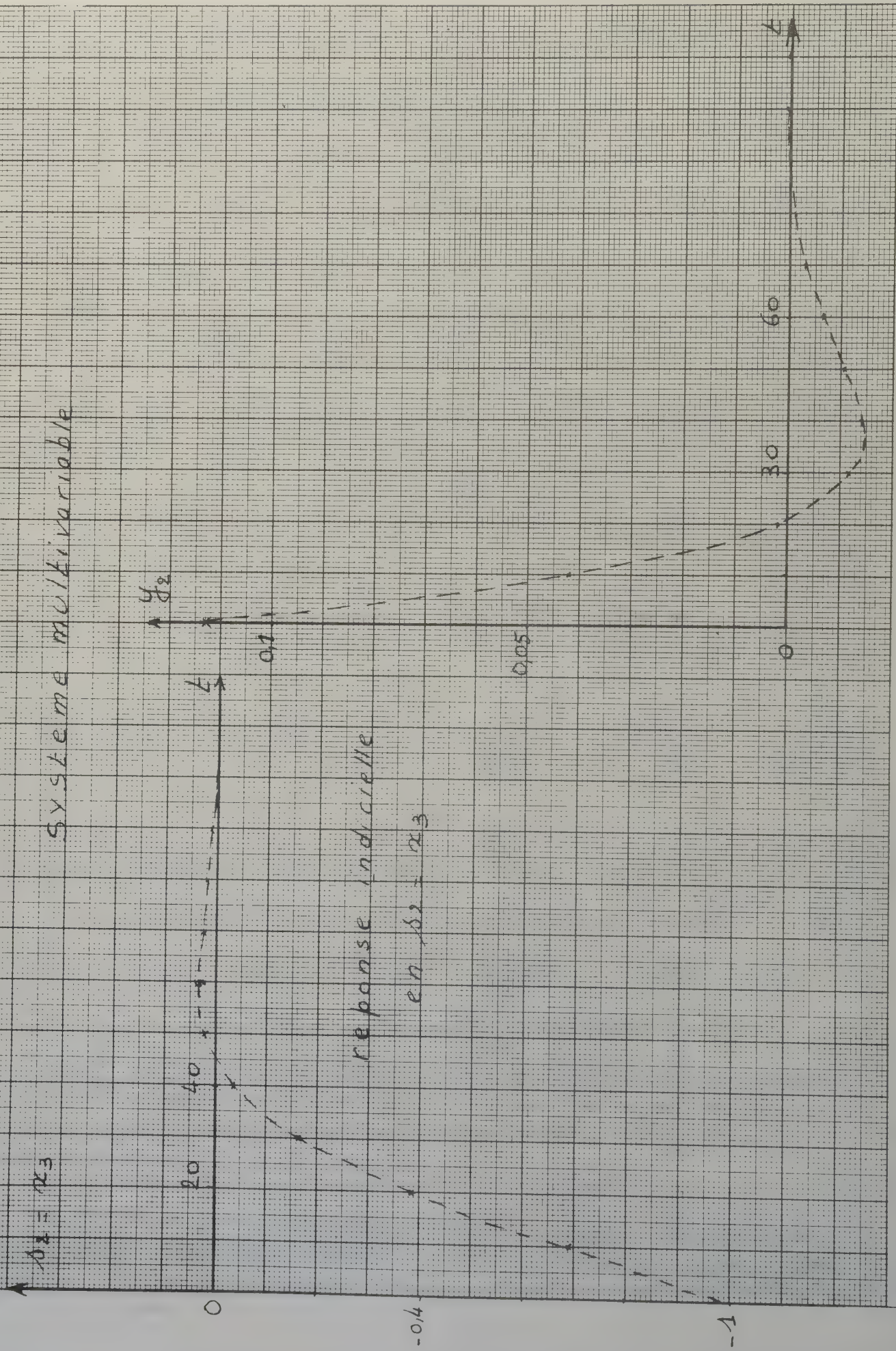
$\lambda_{01} = \alpha_1$

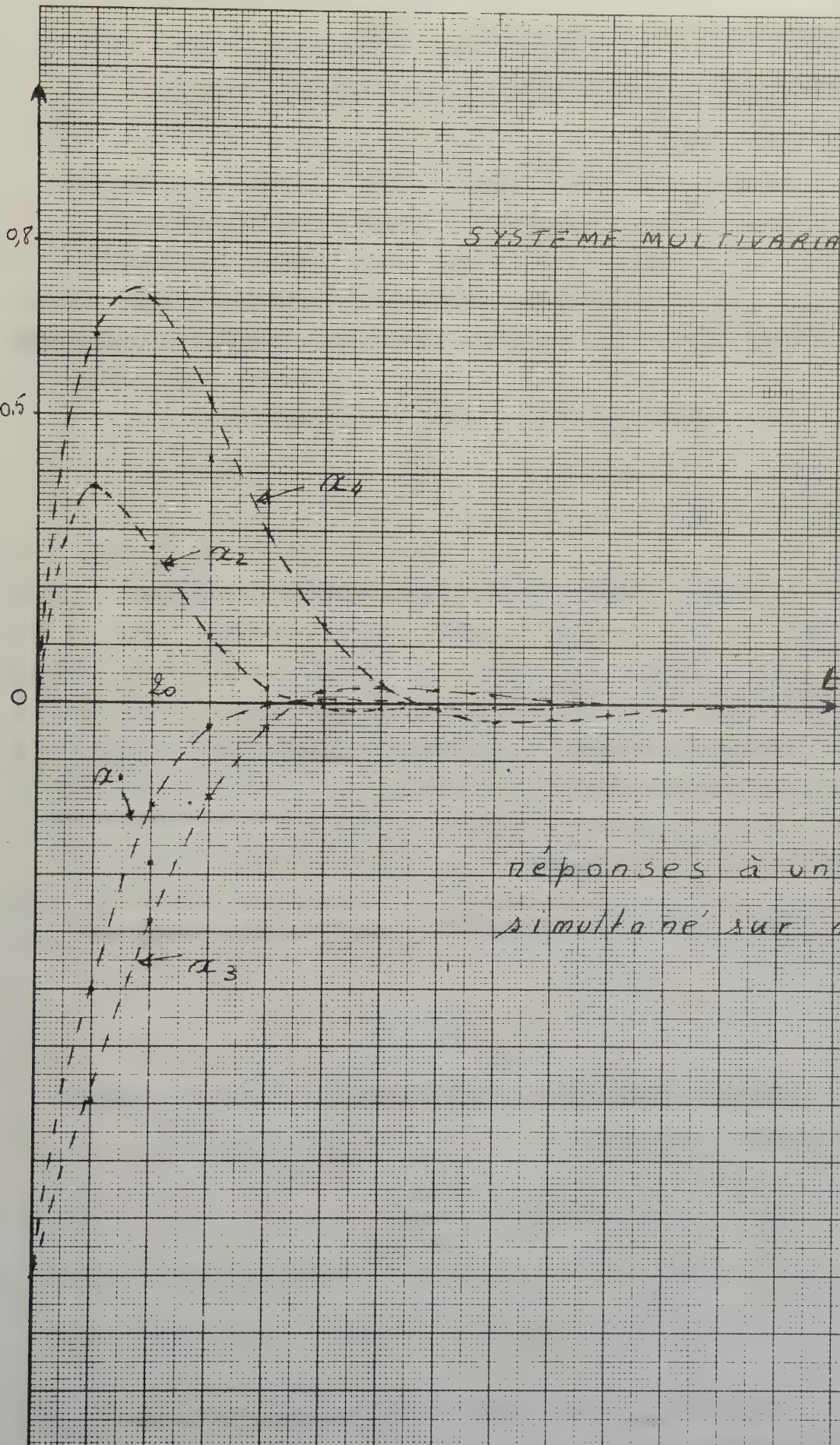


Réponse indicielle
en $\lambda_{01} = \alpha_1$



Systeme multivariable





SYSTEME MULTIVARIABLE

réponses à un échelon
simultané sur α_1 et α_3

5,3 - Systèmes linéaires avec butées sur le vecteur de commande

5,31 - Cas général

Pour traiter du cas le plus général, il faudrait aborder ici un problème multivariable avec contrainte sur chacune des composantes du vecteur de commande. Mais, comme nous cherchons plutôt à dégager les caractères généraux de la mise en oeuvre, nous nous bornerons à reprendre l'exemple simple du double intégrateur traité en 5,21, mais, cette fois, en supposant la commande bornée.

Soit, donc, le système décrit par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = y \end{cases}$$

La loi de commande optimale sera telle que le critère :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (x_1^2 + \alpha^2 y^2) dt$$

soit minimum compte tenu de la contrainte $y \leq M$.

La prise en compte de cette contrainte se fait au niveau de l'équation de programmation dynamique, qui s'écrit :

$$-f_a(a, \underline{c}) = \min_{W \leq M} \left[\frac{1}{2} (c_1^2 + \alpha^2 W^2) + c_2 f_{c_1} + W f_{c_2} \right] \quad (1)$$

Le crochet est minimum lorsque sa dérivée est nulle, c'est-à-dire pour :

$$W = - \frac{f_{c_2}(a, \underline{c})}{\alpha^2}$$

En chaque point de calcul, il faudra donc calculer la valeur $-\frac{f_{c_2}}{\alpha^2}$ pour la comparer à la butée M .

$$\text{Si } -\frac{f_{c_2}}{\alpha^2} < M, \quad W_{\text{opt.}} = -\frac{f_{c_2}}{\alpha^2}$$

$$-\frac{f_{c_2}}{\alpha^2} \geq M, \quad W_{\text{opt.}} = M$$

La valeur $W_{\text{opt.}}$ alors portée dans (1) permet d'effectuer l'intégration de cette équation.

Les équations complémentaires sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} x_1 a + c_2 x_1 c_1 + W_{opt.} x_1 c_2 = 0 \\ x_2 a + c_2 x_2 c_1 + W_{opt.} x_2 c_2 = 0 \\ y_a + c_2 y_{c_1} + W_{opt.} y_{c_2} = 0 \end{cases}$$

Par rapport au problème sans contrainte, la seule modification apparente qui intervient donc concerne l'équation de programmation dynamique. Il faut, pour tout a et tout $\underline{c}$, comparer :

$$- \frac{f_{c_2}}{2} (a, \underline{c}) \quad \text{à} \quad M.$$

En fait, dans le cas sans contrainte, la surface caractéristique de l'équation de programmation dynamique était parfaitement lisse et en chaque point $\underline{c}$ les rayons de courbure étaient grands. Pour calculer les dérivées partielles $\underline{f}_{\underline{c}}(a, \underline{c})$, on pouvait utiliser des pas de discrétisation $\Delta \underline{c}$ larges. Dans le cas présent, cette surface présente des irrégularités des rayons de courbures pouvant être faibles en certains points $\underline{c}$. Il se pose donc un problème de précision pour calculer les $\underline{f}_{\underline{c}}(a, \underline{c})$, qui nécessite de diminuer considérablement les pas de discrétisation. La conséquence immédiate est que le nombre des points de calculs, et par suite le volume des calculs, sont également augmentés.

Pour obtenir des résultats voisins de résultats connus, nous avons dû diminuer le pas $\Delta \underline{c}$ de 5 par rapport à celui que nous avons dans le problème sans contrainte. Le temps de calcul s'en est trouvé multiplié d'autant.

5,32 - Algorithme simplifié

Cet algorithme simplifié, ne concerne que les seuls systèmes monovariabiles pour lesquels nous avons pu obtenir une stratégie d'optimisation lorsque la commande est bornée.

Rappelons ces résultats obtenus en II-4.

Etant donné le système décrit par

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + \underline{b} y$$

le critère $J = \frac{1}{2} \int_a^T (\underline{x}^T Q \underline{x} + \alpha^2 y^2) dt$

$y \leq M$

a_p , instant où la commande quitte sa butée, étant donnée par :

$$-\frac{1}{\alpha^2} \underline{b}^T K(a_p) \underline{c}_p = M \quad (2)$$

avec :

$$\underline{c}_p = \Phi(a_p, a) \underline{c} + M \int_a^{a_p} \Phi(a_p, \alpha) \underline{b} d\alpha \quad (3)$$

et $\Phi(t, \tau) =$ matrice de transition de $\dot{\underline{z}} = A \underline{z}$ (4)

	$a_p \notin [a, T]$	$a_p \in [a, t]$	$a_p \in [t, T]$	
$\underline{x}(t, a, \underline{c})$	$\Omega(a) \underline{c}$	$\Omega(a_p) \underline{c}_p$	$\underline{c}_0$	
$\underline{y}(t, a, \underline{c})$	$\underline{U}^T(a) \underline{c}$	$\underline{U}^T(a_p) \underline{c}_p$	M	

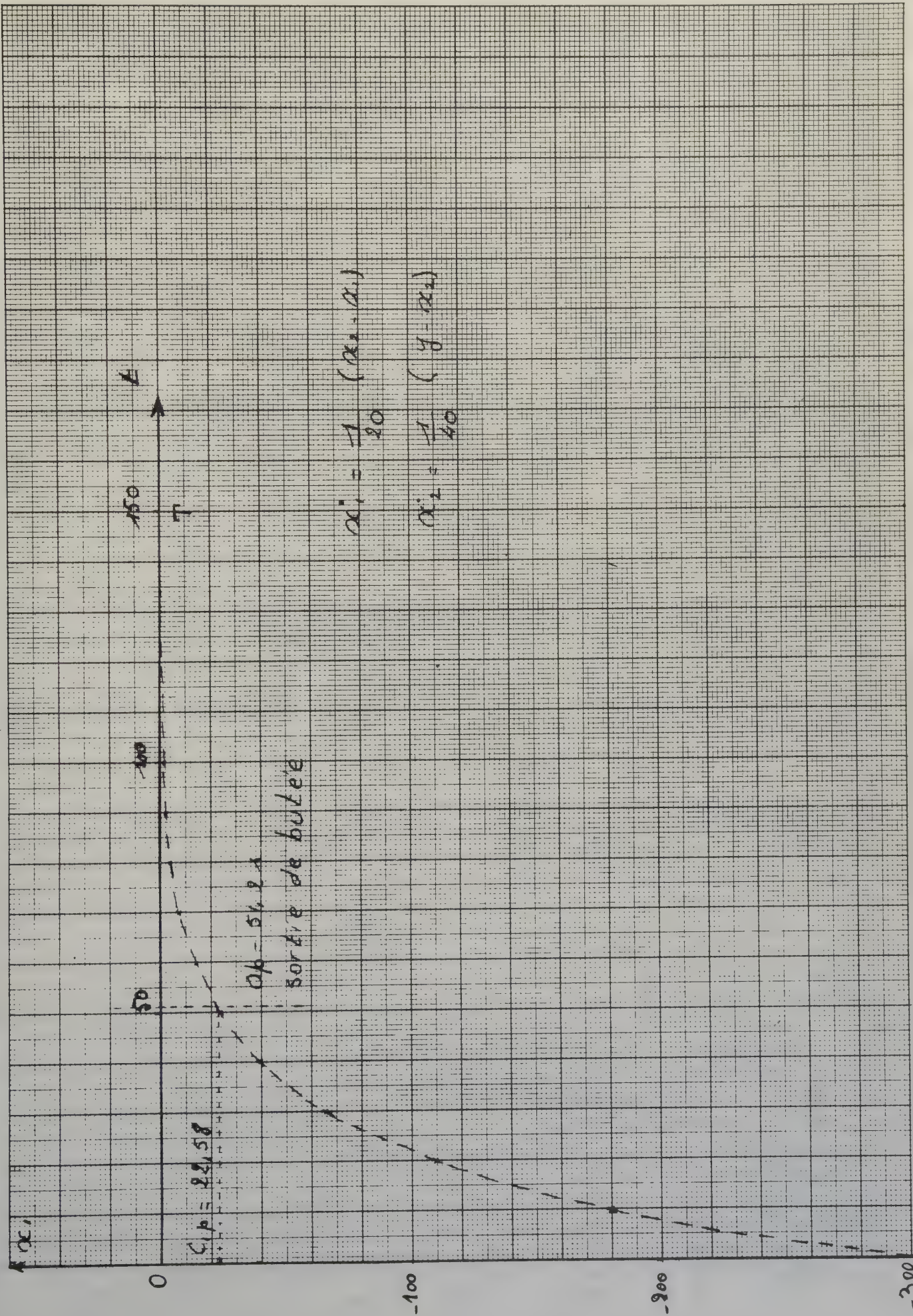
avec :

$$\underline{c}_0 = \Phi(t, a) \underline{c} + M \int_a^t \Phi(t, \alpha) \underline{b} d\alpha \quad (5)$$

Le programme présenté en 5,22 pour les problèmes non contraints permet de calculer :

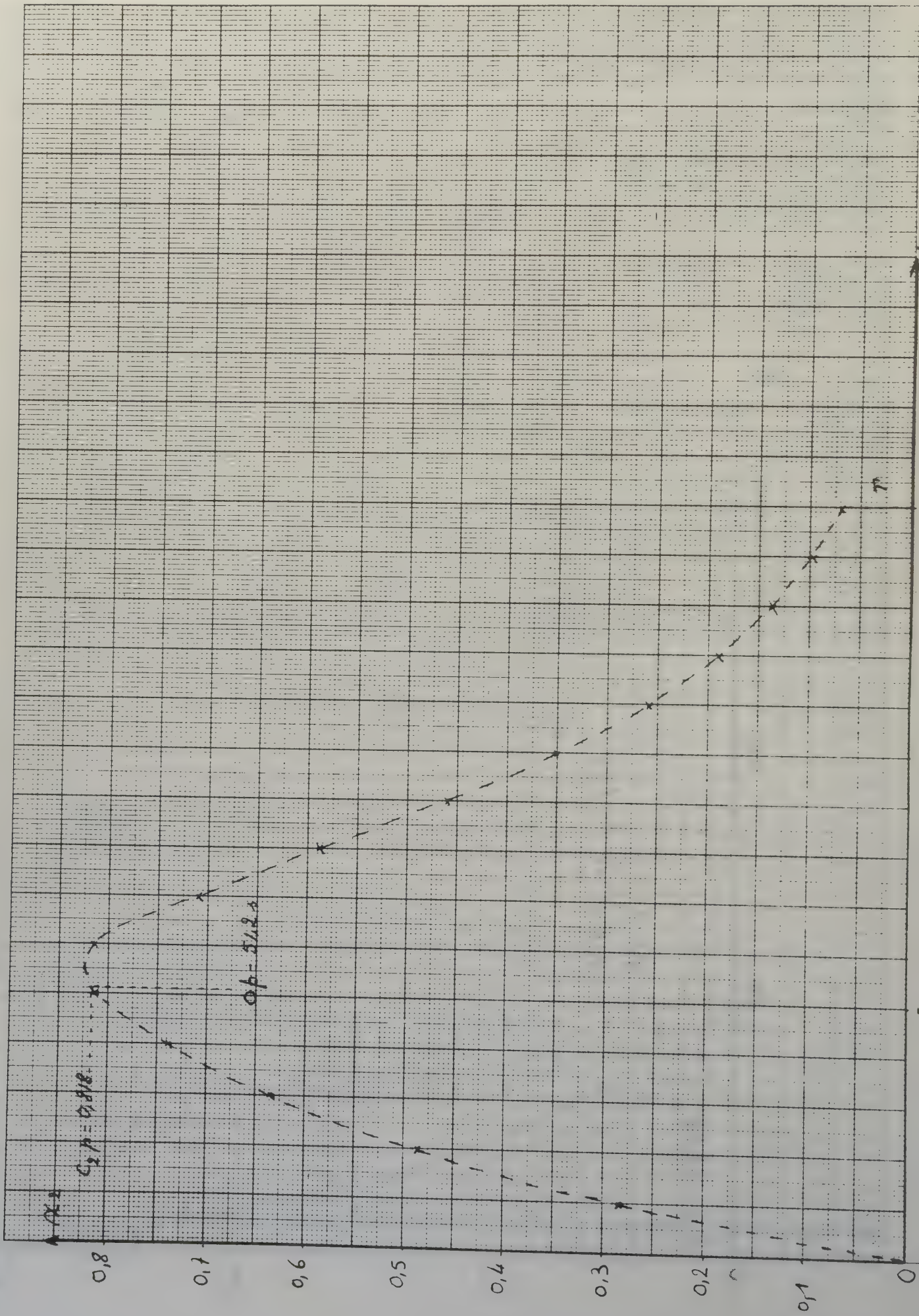
$$\Omega(a) \quad \text{et} \quad \underline{U}(a) \quad \text{pour tout } a$$

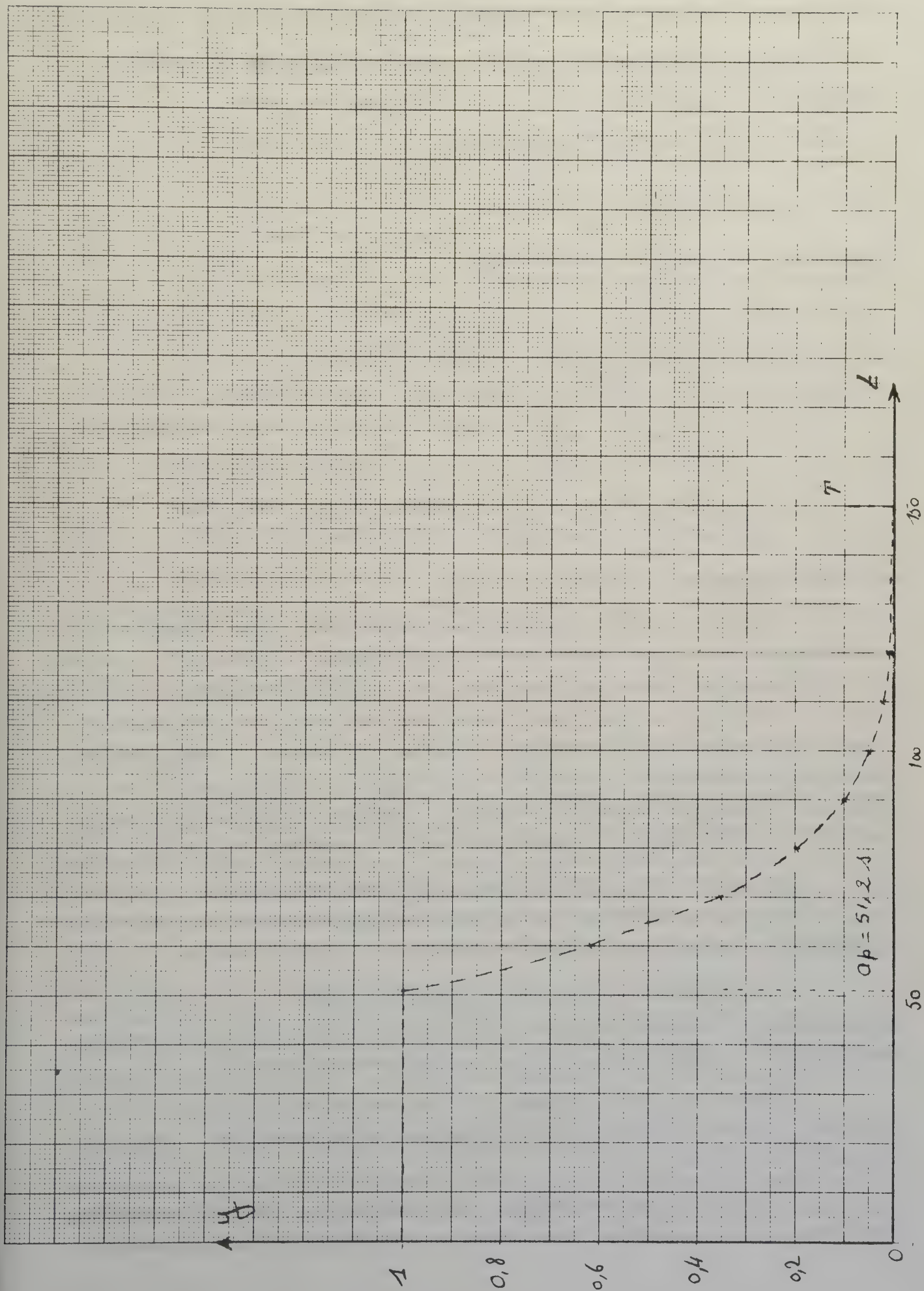
Pour tenir compte de la contrainte sur la commande, il faut calculer a_p , $\underline{c}_p$ et $\underline{c}_0$ et pour cela il suffit d'ajouter au précédent programme des sous



$$x_1^* = \frac{1}{20} (x_2 - a_1)$$

$$x_2^* = \frac{1}{40} (y - a_2)$$





programmes qui calculeront simultanément (2), (3), (4) et (5).

Les résultats numériques présentés concernent le système décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{T_1} (x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{T_2} (y - x_2) \end{cases}$$

pour lequel on a pris le critère suivant :

$$y = \frac{1}{2} \int_0^T (x_1^2 + \alpha^2 y^2) dt \quad y \leq 1$$

$$\underline{x}(0) = \underline{c} = \begin{bmatrix} 300 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T = 150 \text{ s}$$

$$\alpha = 2$$

5,4 - Conclusion

Dans le cas général (avec ou sans contraintes), comme l'équation de programmation dynamique et les équations complémentaires, constituant le système de Cauchy obtenu par Immersion Invariante, sont intégrés simultanément, il n'est pas nécessaire de constituer de table pour tout α et tous $\underline{c}$ et les solutions sont obtenues théoriquement en un balayage. Par contre, il faut intégrer des équations aux dérivées partielles et les difficultés liées à ce type de problèmes : précision, volume des calculs, ... semblent difficilement surmontables pour des problèmes de commande de dimensions réalistes en $\underline{x}$ et $\underline{y}$.

Les algorithmes simplifiés que l'on obtient dans le cadre de l'optimisation quadratique des systèmes linéaires permettent par contre de déterminer aisément les trajectoires optimales du système bouclé.

D'un point de vue théorique, la résolution numérique se fait en un seul balayage : il suffit d'ajouter à l'intégration autant d'équations complémentaires que l'on désire de points sur les trajectoires optimales.

En fait une telle procédure n'est pas envisageable d'un point de vue pratique, à cause du volume de calculs simultanés qu'elle entraîne. L'ensemble suivant va le montrer :

soit un système linéaire, non contraint à n états et m commandes, muni d'un critère quadratique, pour lequel on veut déterminer les trajectoires

optimales à l'aide de l'algorithme simplifié.

- la matrice $K(a)$ solution de l'équation de RICCATI, tirée de la programmation dynamique, comporte n^2 termes et compte tenu de la symétrie de cette matrice, il faut en calculer $\frac{n(n+1)}{2}$
- $\Omega(a)$ matrice donnant l'état en un seul instant comporte n^2 termes tous à calculer.
- $U(a)$ matrice donnant la commande en comporte $m \times n$ également tous à calculer.

Pour connaître état et commande en un seul instant de la période d'optimisation, il faut intégrer simultanément $N = \frac{n(n+1)}{2} + n^2 + m \times n$ équation différentielle ordinaire mais non linéaire.

Dans le cas très élémentaire $n = 2$, $m = 1$, $N = 9$

Pour chaque instant supplémentaire, il faut adjoindre $n^2 + m \times n$ équations, correspondant aux nouvelles intégrations de $\Omega(a)$ et $U(a)$.

Aussi d'un point de vue pratique les programmes que nous avons réalisés procèdent en autant de balayage que l'on désire de points sur les trajectoires.

La capacité de la mémoire de calcul requise est alors directement liée à l'ordre du système étudié.

6 - CONCLUSION -

La façon dont l'immersion invariante permet, dans le domaine de la commande optimale, d'extraire l'information d'une classe de problèmes, constitue une approche très séduisante sur le plan théorique. Aussi, nous avons obtenu directement un système à valeurs limites en un seul point et sous réserves d'hypothèses non restrictives, nous avons pu montrer que les solutions de ce système s'identifient à celles obtenues en utilisant les conditions nécessaires de Pontryagin. De ce fait ce système de CAUCHY se caractérise comme la juxtaposition de l'équation classique de la programmation dynamique tirée du principe d'optimalité et d'équations complémentaires tirées du principe d'invariance des trajectoires optimale. Théoriquement les solutions sont obtenues à la fin d'un seul balayage.

Néanmoins les inconvénients rencontrés dans la mise en oeuvre de la programmation dynamique ne sont que partiellement supprimés : les problèmes de stockage se trouvent pratiquement éliminés, mais l'intégration numérique de systèmes aux dérivées partielles à grand nombre de variables indépendantes pose

des problèmes de précision et de temps de calcul nécessitant des algorithmes spécialisés à mettre en oeuvre sur de puissantes machines.

Dans le cadre de l'optimisation quadratique des systèmes linéaires, nous avons cependant pu mettre en évidence des simplifications notoires, conduisant à des algorithmes d'intérêt pratique : possibilité d'obtenir rapidement hors ligne tout un catalogue de trajectoires optimales d'un système bouclé, ce catalogue pouvant servir à déterminer les paramètres du critère pour obtenir un type de réponse donné, ou être à la base de la mise en oeuvre d'algorithmes sous optimaux. La capacité de la mémoire de calcul que requiert la constitution de ce catalogue est directement liée à l'ordre du système étudié, et au nombre de points désirés par trajectoire.

Chapitre 3

FILTRAGE ET COMMANDE OPTIMALE SELON UN CRITERE A HORIZON FUYANT

Le filtrage et la commande des systèmes linéaires, lorsque l'on utilise les critères classiques, font intervenir des termes en "erreur d'équation", ou des termes de commande, qu'il est souvent difficile de pondérer par rapport aux écarts de sortie, surtout lorsque l'on ne dispose pas sur le problème de données statistiques ou économiques suffisantes.

Dans la mise en oeuvre d'un reconstituteur issu de l'application des théories de KALMAN, l'utilisateur doit quantifier les caractéristiques statistiques de bruits d'équations θ et de bruits de mesures ∂' . Sur le plan pratique, les bruits θ englobent très souvent des écarts, dus aux erreurs inhérentes à la détermination des paramètres du modèle, et ces écarts dépendent de l'état et de la commande appliqués au processus. Ils sont généralement de valeur moyenne non nulle, si bien qu'il peut même être difficile de parler de caractéristiques statistiques.

Dans le cas d'une optimisation quadratique, il importe de déterminer la matrice R , qui pondère les commandes par rapport aux écarts de sortie. Généralement, on ne dispose pas de données économiques suffisantes et le critère apparaît alors beaucoup plus comme un intermédiaire de calcul que comme un but en soi. De plus, outre le fait que cette matrice R est difficile à déterminer, sa présence peut être contraire à la "physique" du processus en ce sens qu'elle a tendance à modifier la commande par rapport à celle imposée par le régime permanent stable du processus.

Pour ces différentes raisons, nous avons essayé de construire un critère, où les coefficients sont en nombre plus restreint mais agissent de façon sélective sur les réponses.

Le critère proposé est de la forme :

$$J = \frac{1}{2} \int_t^T ||\varepsilon||_Q^2 p(t, \tau) d\tau$$

$p(t, \tau)$ étant une fonction de pondération que nous préciserons dans la suite.

Pour l'estimation d'état, comme pour la commande, nous distinguerons trois parties :

- définition d'une estimation (ou d'une commande) optimale à l'instant τ
- détermination d'un algorithme
- étude des propriétés de cet algorithme.

A - ESTIMATION D'ETAT -

I - INTRODUCTION - DEFINITION D'UNE ESTIMATION OPTIMALE -

Nous considérerons ici l'instant présent t comme un instant final donné, et noterons par τ la variable temps.

Les données du problème sont les signaux d'entrée - sortie du processus dont on veut estimer l'état à l'instant t , et ces signaux sont supposés connus depuis un certain instant initial t_0 jusqu'à l'instant final t .

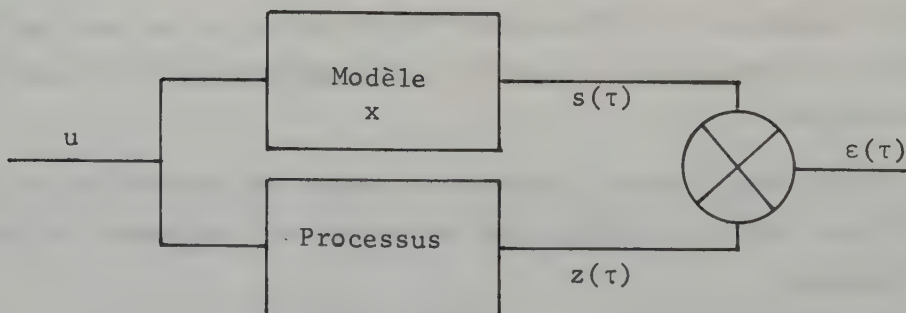
Nous supposerons le processus décrit par le modèle suivant :

$$\frac{dx}{d\tau} = A \underline{x}(\tau) + B \underline{u}(\tau) \quad (1)$$

$$\underline{s}(\tau) = D \underline{x}(\tau) \quad t_0 \leq \tau \leq t \quad (2)$$

$\underline{x}(\tau)$ étant de dimension n , et A, B, D étant fixés arbitrairement, $\underline{s}(\tau)$ de dimension m .

On notera $\underline{z}(\tau)$ le signal de sortie effectivement observé sur le processus.



$\underline{u}(\tau)$ étant donné, le système (1), (2) définit une famille de fonction $\underline{s}(\tau)$, dont l'une est parfaitement définie lorsque l'on se fixe $\underline{x}(\tau)$.

Soit $\varepsilon(\tau)$, l'écart entre la sortie observée $z(\tau)$ et $s(\tau)$.

S'il est possible de trouver un vecteur $\underline{x}(t)$ répondant à (1), tel que $\underline{\varepsilon}(\tau)$ soit identiquement nul pour $\tau \in [t_0, t]$, on dira alors que $\underline{x}(t)$ représente l'état du processus à l'instant t .

Or, en raison des diverses perturbations agissant sur le processus (erreurs de mesure, différence entre les équations du processus et celles du modèle...), $\underline{\varepsilon}(\tau)$ ne sera jamais identiquement nul sur $[t_0, t]$.

On considérera alors comme estimation optimale de l'état du processus à l'instant final t le vecteur $\underline{e}(t)$ tel que le critère suivant portant sur $\underline{\varepsilon}(\tau)$ soit minimum.

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [\underline{z}(\tau) - D \underline{x}(\tau)]^T Q [\underline{z}(\tau) - D \underline{x}(\tau)] e^{2\alpha(\tau-t)} d\tau \quad (3)$$

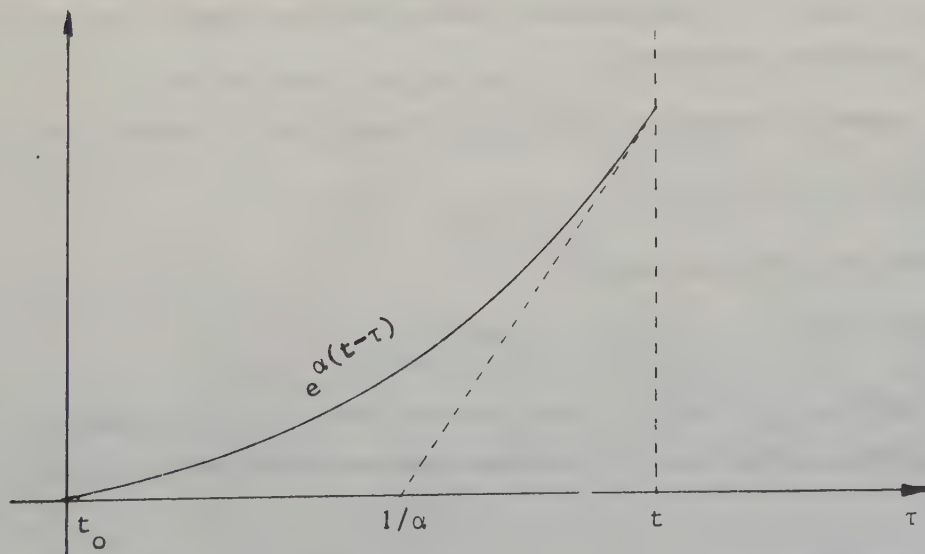
que l'on notera également :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \|\underline{z}(\tau) - D \underline{x}(\tau)\|_Q^2 e^{2\alpha(\tau-t)} d\tau$$

où Q est une matrice définie positive symétrique qui pondère l'importance relative attachée aux diverses composantes de l'écart $\underline{\varepsilon}$.

α une constante positive.

L'écart $\varepsilon(\tau)$ est pondéré par une exponentielle, de sorte que l'estimation $\underline{e}(t)$ porte essentiellement sur les valeurs les plus récentes de $\underline{z}(\tau)$.



Ce choix étant justifié par les considérations suivantes :

Etant donné qu'il est impossible d'annuler $\underline{e}(\tau)$ sur tout l'intervalle $[t_0, t]$, et que l'on s'intéresse à $\underline{e}(t)$, on accordera plus d'importance à l'écart au voisinage de t sur une constante de temps de l'ordre de $1/\alpha$.

2 - LES EQUATIONS DU FILTRE -

2,1 - Approche par Immersion Invariante

La démarche que nous allons adopter maintenant est celle que nous avons développée au cours du premier chapitre en 6,2.

Nous allons transformer le critère à minimiser en une équation différentielle, et utiliserons alors l'Immersion Invariante pour obtenir une équation différentielle partielle régissant la valeur finale de ce critère. Puis, dans un second temps, on recherchera sa valeur minimale par rapport à l'estimation e .

Soit, donc, la fonction $y(\tau)$ définie par :

$$y(\tau) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\tau} \|\underline{z}(\lambda) - D \underline{x}(\lambda)\|_Q^2 e^{2\alpha(\lambda-\tau)} d\lambda \quad (4)$$

$$t_0 \leq \lambda \leq \tau \leq t$$

Cette fonction vérifie $y(t) = J$ et a pour équation différentielle :

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{2} \|\underline{z}(\tau) - D \underline{x}(\tau)\|_Q^2 - 2\alpha y(\tau) \quad (5)$$

Dans le cadre d'une approche par Immersion Invariante, on envisagera l'ensemble des problèmes suivants :

Etant donné le processus décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{d\tau} = A \underline{x}(\tau) + B \underline{u}(\tau)$$

dont on suppose connue la condition finale :

$$\underline{x}(a) = \underline{c}, \quad t_0 \leq \tau \leq a \leq t$$

et dont les entrées sorties $\underline{u}(\tau)$ et $\underline{z}(\tau)$ sont données sur $[t_0, a]$, trouver la condition finale $y(a)$ de la fonction $y(\tau)$ définie par son équation différentielle (5).

Cette condition finale inconnue est évidemment fonction du temps final a , et de la condition finale $\underline{x}(a) = \underline{c}$.

Pour tenir compte de cette dépendance, on note :

$$y(a) = r(a, \underline{c})$$

Pour le problème voisin, dont l'instant final est $a+\Delta$, on a :

$$y(a+\Delta) = r[a+\Delta, \underline{x}(a+\Delta)] \quad (6)$$

Nous allons expliciter séparément les deux membres de cette relation (6).

Si Δ est suffisamment faible, on peut développer au premier ordre le membre de gauche :

$$y(a+\Delta) = y(a) + \dot{y}(a) \Delta + O(\Delta^2)$$

Pour calculer $\dot{y}(a)$ faisons $\tau = a$ dans (5) ; il vient :

$$\dot{y}(a) = \frac{1}{2} \left| \left| \underline{z}(a) - D \underline{x}(a) \right| \right|_Q^2 - 2\alpha y(a)$$

D'où l'on tire :

$$y(a+\Delta) = r(a, \underline{c}) + \left[\frac{1}{2} \left| \left| \underline{z}(a) - D \underline{c} \right| \right|_Q^2 - 2\alpha r(a, \underline{c}) \right] \Delta + O(\Delta^2) \quad (7)$$

De la même façon, on calculera $\underline{x}(a+\Delta)$ à l'aide d'un développement au premier ordre :

$$\underline{x}(a+\Delta) = \underline{x}(a) + \dot{\underline{x}}(a) \Delta + O(\Delta^2)$$

On calcule également $\dot{\underline{x}}(a)$ en faisant $\tau = a$ dans l'équation différentielle (1). Finalement, on obtient :

$$\underline{x}(a+\Delta) = \underline{c} + [A \underline{c} + B \underline{u}(a)] \Delta + O(\Delta^2)$$

En portant dans le membre de droite de (6), on tire :

$$\begin{aligned} r(a+\Delta, \underline{x}(a+\Delta)) &= r(a, \underline{x}(a)) + r_a(a, \underline{x}(a)) \Delta + \\ &+ [A \underline{c} + B \underline{u}(a)]^T r_x(a, \underline{x}(a)) \Delta + O(\Delta^2) \end{aligned} \quad (8)$$

Soit encore :

$$r[a+\Delta, \underline{x}(a+\Delta)] = r(a, \underline{c}) + r_a(a, \underline{c}) \Delta + [A \underline{c} + B \underline{u}(a)]^T r_c(a, \underline{c}) \Delta + O(\Delta^2)$$

D'après (6) on peut égaler (7) et (8), ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} r(a, \underline{c}) + \left[\frac{1}{2} \left| \left| \underline{z}(a) - D \underline{c} \right| \right|_Q^2 - 2\alpha r(a, \underline{c}) \right] \Delta + O(\Delta^2) &= \\ r(a, \underline{c}) + r_a(a, \underline{c}) \Delta + [A \underline{c} + B \underline{u}(a)]^T r_c(a, \underline{c}) \Delta + O(\Delta^2) \end{aligned}$$

En dérivant d'abord par Δ et en faisant ensuite tendre Δ vers 0, on obtient l'équation différentielle (9) :

$$r_a(a, \underline{c}) + [A \underline{c} + B \underline{u}(a)]^T \underline{r}_c(a, \underline{c}) = \frac{1}{2} \| \underline{z}(a) - D \underline{c} \|_Q^2 - 2\alpha r(a, \underline{c}) \quad (9)$$

qui régit la condition finale cherchée $r(a, \underline{c})$.

2,2 - Valeur optimale de l'estimation

Pour calculer $r(a, \underline{c})$ à l'aide de (9), on envisage toutes les valeurs possibles de $\underline{x}(a) = \underline{c}$, sans nous préoccuper de la minimisation de la fonction coût J. Or, le problème au départ est de trouver :

$$\min J/\underline{x}(a) = \underline{c}$$

ce qui, d'après la définition de $y(\tau)$, est aussi :

$$\min r(a, \underline{c})/\underline{c}$$

Pour la valeur de $\underline{c}$ optimale, on aura donc :

$$\frac{\partial r(a, \underline{c})}{\partial \underline{c}} = 0$$

Cette relation permet alors de définir la valeur optimale de l'estimation que nous noterons $\underline{e}(a)$.

Pour $\underline{c} = \underline{e}(a)$, on a donc :

$$\underline{r}_c[a, \underline{e}(a)] = 0 \quad (10)$$

soit, en prenant la différentielle totale de cette expression :

$$R_{cc}[a, \underline{e}(a)] d\underline{e} + \underline{r}_{ca}[a, \underline{e}(a)] da = 0$$

$$R_{cc} = \left[\frac{\partial \underline{r}_{ci}}{\partial \underline{c}_j} \right] \quad \underline{r}_{ca} = \left[\frac{\partial \underline{r}_{ci}}{\partial a} \right]$$

d'où l'on tire :

$$\frac{d\underline{e}}{da} = - R_{cc}^{-1}[a, \underline{e}(a)] \underline{r}_{ca}(a, \underline{e}(a)) \quad (11)$$

(11) représentera donc l'équation d'estimation. Toutefois, il sera possible de l'explicitier en utilisant (9).

Pour ce faire, nous allons différencier (9) par rapport à $\underline{c}$, puis faire $\underline{c} = \underline{e}(a)$ dans cette nouvelle expression. Il vient :

$$\begin{aligned} \underline{r}_{ac}(a, \underline{c}) + R_{cc}(a, \underline{c}) [A \underline{c} + B \underline{u}(a)] + A^T \underline{r}_c(a, \underline{c}) = \\ - D^T Q [\underline{z}(a) - D \underline{c}] - 2\alpha \underline{r}_c(a, \underline{c}) \end{aligned} \quad (12)$$

Pour $\underline{c} = \underline{e}(a)$, en tenant compte de (10), il vient :

$$\underline{r}_{ac}(a, \underline{e}(a)) + R_{cc}(a, \underline{c}) [A \underline{c} + B \underline{u}(a)] = -D^T Q [\underline{z}(a) - D \underline{e}(a)]$$

soit, en portant dans (11) :

$$\frac{d\underline{e}}{da} = A \underline{e}(a) + B \underline{u}(a) + R_{cc}^{-1}(a, \underline{e}(a)) D^T Q [\underline{z}(a) - D \underline{e}(a)]$$

Posons enfin :

$$R_{cc}^{-1}(a, \underline{e}(a)) = P(a)$$

$$\boxed{\frac{d\underline{e}}{da} = A \underline{e}(a) + B \underline{u}(a) + P(a) D^T Q [\underline{z}(a) - D \underline{e}(a)]} \quad (13)$$

On remarquera que $P(a)$, ainsi définie comme l'inverse d'une matrice de dérivées secondes, est une matrice symétrique.

(13) constitue alors "l'équation d'estimation". Afin de l'explicitement complètement, nous allons chercher l'équation différentielle dont $P(a)$ est la solution.

2,3 - Equation différentielle de la matrice "poids"

Par définition, nous avons.:

$$P(a) R_{cc}(a, \underline{e}(a)) = \mathbb{I}$$

Différencions par rapport à a . Il vient :

$$P_a(a) R_{cc}(a, \underline{e}(a)) + P(a) R_{cca}(a, \underline{e}) + P(a) R_{ccc}(a, \underline{e}) \frac{d\underline{e}}{da} = 0 \quad (14)$$

en notant :

$$R_{ccc}(a, \underline{e}(a)) \underline{e}_a(a) = [\underline{r}_{cicjc}^T \underline{e}_a(a)]_{n \times n}$$

Or, nous avons :

$$\min J = y(a) = r(a, \underline{c})$$

Le système (1) étant linéaire, la fonction coût quadratique $r(a, \underline{c})$ est une fonction quadratique de $\underline{e}$. Il en résulte que $R_{ccc}(a, \underline{e}(a))$, qui représente une dérivée troisième, est nulle.

(14) peut donc se simplifier de la façon suivante :

$$P_a(a) R_{cc}(a, \underline{e}(a)) + P(a) R_{cca}(a, \underline{e}(a)) = 0 \quad (15)$$

Calculons $R_{cca}(a, \underline{e}(a))$ et dérivons (12) par rapport à $\underline{c}$.

Sachant que $R_{acc} = R_{cca}$, il vient :

$$R_{cca}(a, \underline{c}) + R_{ccc}(a, \underline{c}) [A \underline{c} + B \underline{u}(a)] + R_{cc}(a, \underline{c}) A + A^T R_{cc}(a, \underline{c}) = D^T Q D - 2\alpha R_{cc}(a, \underline{c})$$

soit, pour $\underline{c} = \underline{e}(a)$:

$$R_{cca}(a, \underline{e}) = -R_{cc}(a, \underline{e}) A - A^T R_{cc}(a, \underline{e}) + D^T Q D - 2\alpha R_{cc}(a, \underline{e})$$

soit encore :

$$-R_{cca}(a, \underline{e}) = P^{-1}(a) A + A^T P^{-1}(a) + 2\alpha P^{-1}(a) - D^T Q D$$

d'où, en portant dans (5) :

$$P_a(a) = A P(a) + P(a) A^T + 2\alpha P(a) - P(a) D^T Q D P(a)$$

que l'on peut également écrire, sachant que $P(a)$ est symétrique :

$$P_a(a) = (A + \alpha \mathbb{I}) P(a) + P(a) (A + \alpha \mathbb{I})^T - P(a) D^T Q D P(a) \quad (16)$$

(16) représente donc l'équation différentielle matricielle de la fonction "poids" $P(a)$.

Si nous notons $R(a) = R_{cc}(a, \underline{e}(a)) = P^{-1}(a)$, on a :

$$R_a(a) = -R(a) P_a(a) R(a)$$

$R(a)$ étant alors solution de l'équation différentielle :

$$R_a(a) = -R(a) (A + \alpha \mathbb{I}) - (A + \alpha \mathbb{I})^T R + D^T Q D \quad (17)$$

2,4 - Conclusion

Finalement, les équations du filtre obtenues sont les suivantes :

$$\underline{e}_a(a) = A \underline{e}(a) + B \underline{u}(a) + P(a) D^T Q [z(a) - D \underline{e}(a)] \quad (13)$$

$$P_a(a) = P(a) (A + \alpha \mathbb{I})^T + (A + \alpha \mathbb{I}) P(a) - P(a) D^T Q D P(a) \quad (16)$$

(16) pouvant, en outre, être mis sous la forme (17) :

$$R_a(a) = -R(a) (A + \alpha \mathbb{I}) - (A + \alpha \mathbb{I})^T R(a) + D^T Q D \quad (17)$$

Restent maintenant à préciser les initialisations à donner à $\underline{e}(a)$ et $P(a)$ pour intégrer ces équations.

Sur le plan formel, la structure de ce filtre, obtenu par une méthode de moindres carrés, est comparable à celle que l'on obtient en abordant le problème de l'estimation linéaire d'un point de vue statistique. Il n'apparaît pas dans l'équation de RICCATI de la matrice "poids" $P(a)$ de terme en "erreur d'équation" comme dans les critères habituellement utilisés, terme dont les coefficients pondérateurs sont difficiles à choisir si l'on ne dispose pas de modèle stochastique complet du processus.

Nous n'aurons ici, pour mettre en oeuvre le filtre, qu'à calculer la valeur du seul coefficient α qui fixe l'intervalle sur lequel on accorde le plus de confiance aux mesures $\underline{z}(\tau)$.

3 - ETUDE DE LA "MATRICE POIDS $P(a)$ " -

Etant donné l'équation différentielle matricielle de RICCATI suivante :

$$P_a(a) = P(a) (A + \alpha I)^T + (A + \alpha I) P(a) - P(a) D^T Q D P(a)$$

en nous plaçant essentiellement d'un point de vue mathématique, c'est-à-dire en négligeant le sens physique de $P(a)$, nous allons essayer de dégager un certain nombre de propriétés de la matrice $P(a)$. Dans une étude en régime transitoire, nous essaierons de fixer les conditions d'existence et d'unicité de la solution, ainsi que les modalités d'initialisation de l'algorithme. Puis, nous effectuerons une étude du régime permanent, en précisant les conditions conduisant à l'existence d'un filtre stationnaire stable.

3,1 - Etude en régime transitoire

Soit donc l'équation différentielle :

$$P_a(a) = P(a) (A + \alpha I)^T + (A + \alpha I) P(a) - P(a) D^T Q D P(a) \quad (16)$$

où A désigne une matrice carrée $n \times n$

D une matrice $m \times n$

Q une matrice $n \times n$ définie positive symétrique

α une constante positive.

3,11 - Conventions et notations

(16) est une équation différentielle non linéaire de RICCATI à laquelle on peut associer le système linéaire matriciel suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dX}{da} &= - (A + \alpha I)^T X + D^T Q D Y \\ \frac{dY}{da} &= (A + \alpha I) Y \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (18)$$

avec :

$$M = \left[\begin{array}{c|c} -(A+\alpha)^T & D^T Q D \\ \hline 0 & (A+\alpha) \end{array} \right]$$

X et Y étant des matrices carrées $n \times n$

M une matrice $2n \times 2n$

On appellera solution matricielle de (18) un ensemble de matrices X, Y, vérifiant (18) et de CI.

$$X(a_0) = I \quad \text{et} \quad Y(a_0) = \Lambda$$

$$a_0 \leq a$$

3,12 - Existence d'une solution générale P(a)

Proposition : une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution P(a) de l'équation (16), avec $P(a_0) = \Lambda$, est que la solution matricielle X(a) existe et soit inversible sur un certain intervalle $[a_0, a_1]$. P(a) peut alors se mettre sous la forme $P(a) = Y(a) X^{-1}(a)$.

Condition nécessaire :

Supposons que sur $[a_0, a_1]$, $\det X(a) \neq 0$. Nous allons montrer que $Y(a) X^{-1}(a)$ est solution de (16).

$$\frac{d}{da} (Y X^{-1}) = Y_a X^{-1} - Y X^{-1} X_a X^{-1} \quad (19)$$

$X_a(a)$ et $Y_a(a)$ étant définis par (18), portons ces valeurs dans (19) ; il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} (Y X^{-1}) &= (A + \alpha I) Y X^{-1} - Y X^{-1} (-(A + \alpha I)^T X + D^T Q D Y) X^{-1} \\ &= (A + \alpha I) Y X^{-1} + Y X^{-1} (A + \alpha I)^T - Y X^{-1} D^T Q D Y X^{-1} \end{aligned}$$

$Y X^{-1}$ est donc bien solution de (16).

Or, X(a) étant une fonction continue, en tant que solution du système linéaire (18), et son déterminant valant 1 pour $a = a_0$, il existe donc bien un intervalle $[a_0, a_1]$ tel que sur cet intervalle $\det X(a) \neq 0$.

Réciproque : Si $P(a)$, solution de (16), existe sur (a_0, a_1) , avec $P(a_0) = \Lambda$, alors le système matriciel (18) admet une solution avec $X(a)$ inversible sur (a_0, a_1) .

Soit $\Omega(a, a_0)$ la matrice de transition du système linéaire suivant :

$$\dot{Y} = [-(A + \alpha I)^T + D^T Q D P(a)] Y \quad (20)$$

et, de plus, posons :

$$X(a) = \Omega(a, a_0) \quad (21)$$

$$Y(a) = P(a) \Omega(a, a_0) \quad (22)$$

Calculons $X_a(a)$ et $Y_a(a)$:

$$X_a(a) = -(A + \alpha I)^T X + D^T Q D P X$$

$$X_a(a) = -(A + \alpha I)^T X + D^T Q D Y$$

$$Y_a(a) = P_a X + P X_a$$

en remplaçant $P_a(a)$ par son expression (16) :

$$Y_a(a) = P(a) (A + \alpha I)^T X + (A + \alpha I) P X - P(a) D^T Q D P(a) X - P(a) (A + \alpha I)^T X + P^T D^T Q D P X$$

soit encore :

$$Y_a(a) = (A + \alpha I) P(a) X = (A + \alpha I) X$$

Il résulte donc que si $P(a)$ existe sur $[a_0, a_1]$, avec $P(a_0) = \Lambda$:

$$X(a) = \Omega(a, a_0)$$

$$Y(a) = P(a) \Omega(a, a_0)$$

sont solutions du système matriciel (18), et, de plus :

$$X(a_0) = \Omega(a_0, a_0) = I$$

$$Y(a_0) = P(a_0) \cdot I = \Lambda$$

$X(a)$ se présente, en outre, comme une matrice de transition, par conséquent inversible.

$$X^{-1}(a) = \Omega(a_0, a)$$

Il y a donc équivalence entre l'existence d'une solution $P(a)$ de (16) et l'inversibilité de la solution matricielle $X(a)$ de (18).

Or, $X(a)$ apparait comme une matrice de transition et se trouve donc inversible.

3,13 - Unicité de la solution $P(a)$

$X(a)$ et $Y(a)$ sont les solutions matricielles du système (18).

$$\begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(A+\alpha)^T & D^T Q D \\ 0 & (A+\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

Montrons que la matrice M est hamiltonienne.

Soit $\underline{v}$ et $\underline{w}$ deux vecteurs satisfaisant l'équation différentielle :

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_a \\ \underline{w}_a \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \underline{v} \\ \underline{w} \end{bmatrix}$$

Soit H l'hamiltonien associé :

$$H = \frac{1}{2} (D \underline{w})^T Q (D \underline{w}) - \underline{w}^T (A+\alpha) \underline{v}$$

On vérifie aisément que :

$$\begin{cases} \underline{v}_a = \underline{H}_w \\ \underline{w}_a = -\underline{H}_v \end{cases}$$

Par suite, M étant hamiltonienne, une solution matricielle X, Y , de (18) vérifiant des conditions initiales déterminées :

$$X(a_0) = \mathbb{I}, \quad Y(a_0) = \Lambda, \text{ est unique.}$$

3,14 - Propriétés de la solution $P(a)$

- Si l'initialisation Λ , $(P(a_0) = \Lambda)$, est une matrice symétrique, alors $P(a)$ est symétrique.

On rappelle que :

$$P(a) = Y(a) X^{-1}(a); \quad P(a_0) = \Lambda$$

$$X(a_0) = \mathbb{I}; \quad Y(a_0) = \Lambda$$

soit :

$$K(a) = [Y(a) X^{-1}(a)]^T = X^{-1T}(a) Y(a)$$

Cherchons quelle est l'équation différentielle régissant

$K(a)$:

$$\begin{aligned} K_a(a) &= -X^{-1T} X_a^T X^{-1T} Y^T + X^{-1T} Y_a^T \\ &= X^{-1T} [-X_a^T K + Y_a^T] \\ &= X^{-1T} [Y^T (A + \alpha \mathbb{I})^T + X^T (A + \alpha \mathbb{I}) K - Y^T D^T Q D K] \end{aligned}$$

soit enfin :

$$K_a(a) = K(A + \alpha \mathbb{I})^T + (A + \alpha \mathbb{I}) K - K D^T Q D K$$

On constate donc que $K(a)$ vérifie (16).

La solution de (16) étant unique pour une initialisation donnée, il en résulte donc que $K(a) = P(a)$ à condition que $\Lambda = \Lambda^T$.

- Si l'initialisation Λ est régulière, $P(a)$ est inversible.

$P(a) = Y(a) X^{-1}(a)$. Pour que $P(a)$ soit inversible, il faut et il suffit que $\det P(a) \neq 0$.

$$\det P(a) = \det (Y(a)) \cdot \det X^{-1}(a)$$

$X(a)$ se présente comme une matrice de transition $\Omega(a, a_0)$. Par suite, $\det X(a) \neq 0$ et $\det X^{-1}(a) \neq 0$.

Si nous revenons à (18), on remarque que $Y(a)$ est solution de :

$$Y_a(a) = (A + \alpha \mathbb{I}) Y(a) \quad Y(a_0) = \Lambda$$

Si on note $\phi(a, a_0)$ la matrice de transition de :

$$\underline{w}_a = (A + \alpha \mathbb{I}) \underline{w},$$

$Y(a)$ peut se mettre sous la forme :

$$Y(a) = \phi(a, a_0) \Lambda$$

Par suite :

$$\det Y(a) = \det \phi(a, a_0) \cdot \det \Lambda$$

Donc, pour que :

$$\det Y(a) \neq 0,$$

il suffit donc que $\det \Lambda \neq 0$, c'est-à-dire que Λ soit régulière.

- $P(a)$ est-elle définie positive ?

Supposons que $\det \Lambda \neq 0$. $P(a)$ est alors inversible.

Soit $R(a)$ telle que $P(a) R(a) = \mathbb{I}$.

$R(a)$ est alors solution de (17) :

$$R_a'(a) = - R(a) (A + \alpha \mathbb{I}) - (A + \alpha \mathbb{I})^T R(a) + D^T Q D \quad (17)$$

Soit $\Phi(a, a_0)$ la matrice de transition du système :

$$\dot{\Phi} = - (A + \alpha \mathbb{I}) \Phi$$

Une solution particulière de l'équation (17) est alors donnée par :

$$R_a^*(a) = \int_{a_0}^a \Phi^T(a, \alpha) D^T Q D \Phi(a, \alpha) d\alpha$$

En effet :

$$\begin{aligned} R_a^*(a) &= \Phi^T(a, a) D^T Q D \Phi(a, a) - \int_{a_0}^a (A + \alpha \mathbb{I})^T \Phi^T(a, \alpha) D^T Q D \Phi(a, \alpha) d\alpha \\ &\quad - \int_{a_0}^a \Phi^T(a, \alpha) D^T Q D \Phi(a, \alpha) (A + \alpha \mathbb{I}) d\alpha = (17) \end{aligned}$$

De plus, on peut également trouver une solution particulière sans second membre de (17) :

$$R_a^{**}(a) = \Phi^T(a, a_0) \Lambda^{-1} \Phi(a, a_0)$$

Il en résulte que la solution générale $R(a)$ peut s'écrire :

$$R(a) = \Phi^T(a, a_0) \Lambda^{-1} \Phi(a, a_0) + \int_{a_0}^a \Phi^T(a, \alpha) D^T Q D \Phi(a, \alpha) d\alpha \quad (22)$$

Q étant par hypothèse une matrice définie positive, la matrice intégrale du membre de droite de (22) est définie positive.

D'autre part, la somme de deux matrices définies positives étant une matrice définie positive, une condition suffisante pour que $R(a)$ soit définie positive est que Λ^{-1} soit définie positive. Cette condition entraînera alors $P(a)$ définie positive.

3,15 - Conclusion

L'équation :

$$P_a'(a) = P(a) (A + \alpha \mathbb{I})^T + (A + \alpha \mathbb{I}) P(a) - P(a) D^T Q D P(a)$$

admet une solution, et cette solution est unique pour une initialisation donnée $P(a_0) = \Lambda$.

- $P(a)$ peut se mettre sous la forme $P(a) = Y(a) X^{-1}(a)$, avec $Y(a_0) = \Lambda$, $X(a_0) = I$, $Y(a)$ et $X(a)$ étant les solutions du système différentiel linéaire associé à l'équation de RICCATI.

- $P(a)$ est symétrique si l'initialisation Λ est symétrique (C.N.S.).

- $P(a)$ est inversible si l'initialisation est régulière (C.N.S.).

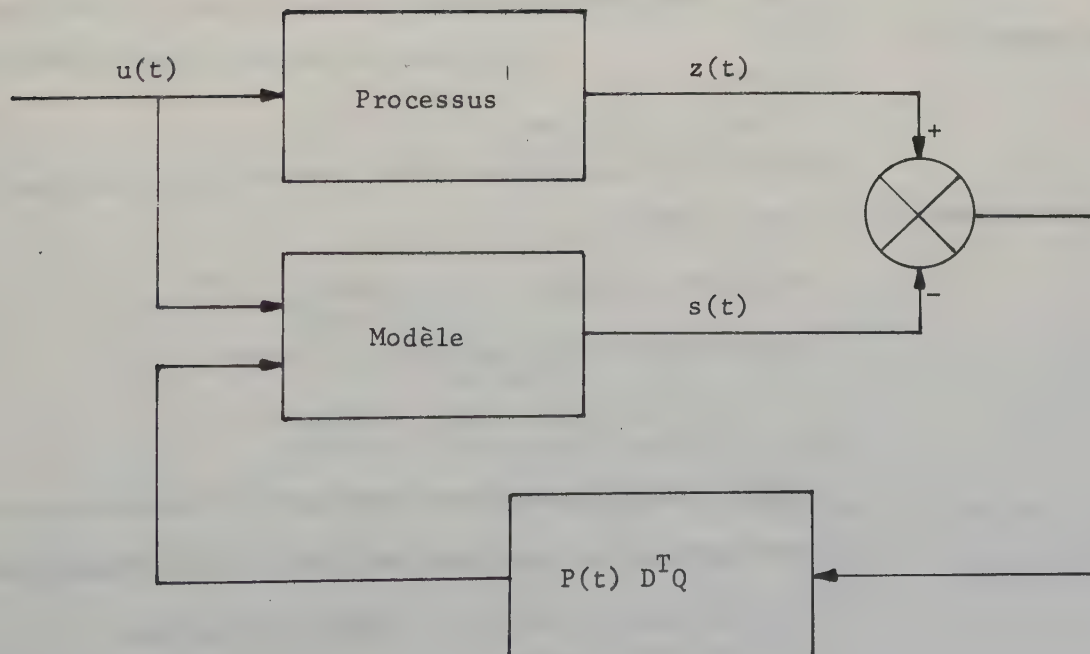
- $P(a)$ est définie positive si l'initialisation est définie positive (C.S.).

3,2 - Etude du régime permanent de l'équation (16)

Reprenons l'équation (13) d'estimation :

$$\dot{e}_a(a) = A \underline{e}(a) + B \underline{u}(a) + P(a) D^T Q [z(a) - D \underline{e}(a)] \quad (13)$$

La structure du filtre obtenu est donc la suivante :



Nous venons d'étudier les conditions d'existence de la matrice $P(t)$. Nous allons maintenant nous attacher à la recherche des conditions permettant d'obtenir un filtre stationnaire stable et qui ne soit pas à gain nul. Nous essaierons, en outre, de préciser une méthode permettant le calcul direct du gain de ce filtre, sans qu'il soit nécessaire de passer par l'intégration de l'équation de RICCATI (17).

Nous procéderons en deux étapes : tout d'abord, une étude d'un cas particulier très simple, qui nous permettra de dégager un certain nombre d'idées directrices, puis une généralisation de ces résultats.

3,21 - Etude d'un exemple élémentaire

Considérons le modèle :

$$\dot{x} = \beta x + u$$

la sortie étant :

$$s(\tau) = x(\tau)$$

- Dans le cas où $\alpha = 0$

L'équation d'estimation (13) se réduit à :

$$\dot{e} = \beta e + p(z-e) + u$$

la fonction "poids" p étant donnée par :

$$\dot{p} = 2\beta p - p^2$$

Il y a deux possibilités de régime permanent pour cette seconde équation :

$$p^* = 0$$

$$p^* = 2\beta$$

* Si $\beta > 0$, la solution $p^* = 0$ est instable, et, par contre, la solution $p^* = 2\beta$ est stable.

En effet : posons $\epsilon = p - 2\beta = p - p^*$

En portant dans l'équation, il vient :

$$\dot{\epsilon} = (\epsilon + 2\beta)(-\epsilon) = -2\beta\epsilon - \epsilon^2$$

Cette équation est alors stable au voisinage de $\epsilon = 0$

Par contre, au voisinage de $p^* = 0$, ϵ est donné par :

$$\dot{\epsilon} = 2\beta\epsilon - \epsilon^2 \quad \text{équation instable}$$

* Si $\beta < 0$, les calculs précédents montrent immédiatement que $p^* = 0$ est la solution stationnaire stable, tandis que $p^* = 2\beta$ est une solution instable.

Rejetons la solution stationnaire $p^* = 0$ qui conduit à un gain du filtre stationnaire nul.

L'équation d'estimation pour $p^* = 2\beta$ devient :

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \beta e + 2\beta(z-e) + u \\ &= -\beta e + 2\beta z + u\end{aligned}$$

Le filtre est stable pour $\beta > 0$.

En résumé, nous constatons donc que l'on obtient un filtre stationnaire stable pour la solution stationnaire stable de la fonction poids. Par contre, ce filtre n'est envisageable que si le modèle est instable ($\beta > 0$) ; si ce résultat peut se généraliser, l'introduction de la fonction de pondération $e^{\alpha(\tau-t)}$ dans le critère d'estimation n'a d'intérêt que si elle permet d'éviter la solution triviale $p^* = 0$, qui apparaît lorsque le modèle est instable.

- Soit donc $\alpha > 0$

Envisageons de nouveau le cas $\beta < 0$ qui, précédemment, conduisait à la solution stationnaire stable $p^* = 0$.

On aura :

$$\dot{p} = 2(\beta + \alpha) p - p^2$$

qui admet comme solutions stationnaires :

$$p^* = 0 \quad \text{et} \quad p^* = 2(\beta + \alpha)$$

soit :

$$\epsilon = p - 2(\beta + \alpha)$$

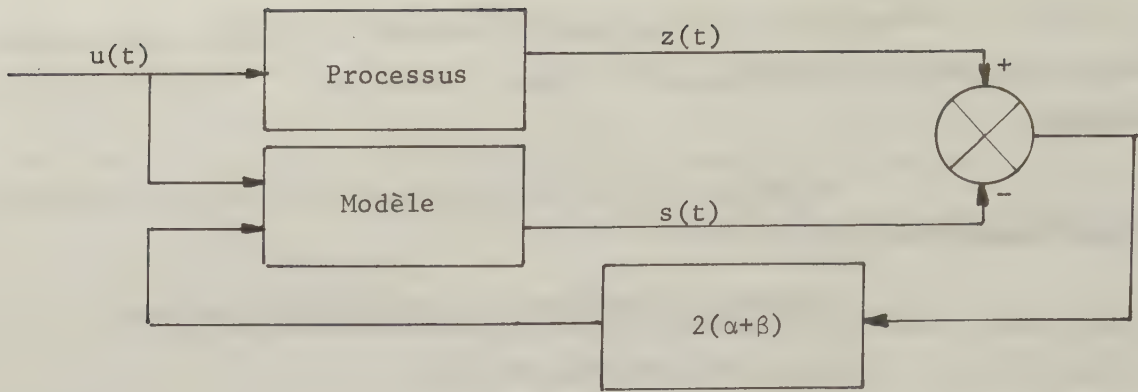
On a alors :

$$\dot{\epsilon} = -2(\beta + \alpha) \epsilon - \epsilon^2$$

Cette équation sera stable si $\beta + \alpha > 0$.

On pourra donc éliminer la solution triviale en choisissant α tel que $\beta + \alpha > 0$ et, dans ce cas, on sera aussi conduit à un filtre stable :

$$\dot{e} = \beta e + u + 2(\alpha + \beta) (z - e)$$



Remarquons, en outre, que β représente (au signe près) l'inverse de la constante de temps du modèle. Pour réaliser $\alpha + \beta > 0$, il faudra choisir $\alpha > -\beta$, soit $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{-\beta}$. La constante de temps de pondération des écarts, dans le critère, doit donc être choisie inférieure à la constante de temps du modèle.

3,22 - Existence d'une limite de $P(a)$ autre que $P = 0$.

$P(a)$ est solution de l'équation (16) qui s'écrit :

$$P_a(a) = P(a) (A + \alpha I)^T + (A + \alpha I) P(a) - P(a) D^T Q D P(a) \quad (16)$$

Dans la suite, nous noterons la limite de $P(a)$, différente de 0, par P^* .

Supposons donc que P^* existe et que cette limite est inversible.

Posons :

$$P^* R^* = I$$

R^* constitue donc le régime permanent de (17) et satisfait :

$$R^* (A + \alpha I) + (A + \alpha I)^T R^* = D^T Q D \quad (24)$$

On montre alors [voir GAND MACHER - théorie des matrices] que cette équation matricielle admet une solution unique, à condition que le système homogène correspondant :

$$R^* (A + \alpha I) + (A + \alpha I)^T R^* = 0$$

n'admette que la solution triviale.

Or, l'équation $A X - X B = 0$ n'admet que la solution triviale $X = 0$, si les matrices A et B ont leurs polynômes caractéristiques premiers entre eux.

Ici, nous avons :

$$B = -A^T$$

Si l'on note $\Delta(\lambda) = (\lambda I - A)$, on a :

$$\Delta(-\lambda) = |-\lambda I - A| = (-1)^n |\lambda I + A| = (-1)^n |\lambda I + A^T|$$

Donc, pour que $\Delta(\lambda)$ et $\Delta(-\lambda)$ n'aient pas de diviseurs communs, il faut et il suffit que $A + \alpha I$:

- n'ait pas de valeurs propres nulles,
- n'ait pas de valeurs propres opposées.

Alors R^* existe et est unique.

3,23 - Forme générale des solutions stationnaires P^*

P^* constitue donc le régime permanent de $P(a)$ et vérifie :

$$P^*(A + \alpha I)^T + (A + \alpha I) P^* - P^* D^T Q D P^* = 0 \quad (25)$$

A cette équation, associons la matrice M précédemment définie.

$$M = \left[\begin{array}{c|c} -(A + \alpha I)^T & D^T Q D \\ \hline 0 & (A + \alpha I) \end{array} \right]$$

Soit μ une valeur propre de M . Calculons le polynôme caractéristique de M .

$$|\mu I - M| = |\mu I + (A + \alpha I)^T| \times |\mu I - (A + \alpha I)|$$

Si $\Delta(\mu) = |\mu I - (A + \alpha I)|$, on aura :

$$|\mu I - M| = (-1)^n \Delta(\mu) \times \Delta(-\mu)$$

La matrice M admet donc comme valeurs propres l'ensemble des valeurs propres de $(A + \alpha I)$, ainsi que leurs opposées.

Soit Z la matrice $2n \times 2n$ des vecteurs propres de M et :

$$\begin{bmatrix} X^* \\ \hline Y^* \end{bmatrix} \quad \text{une matrice } 2n \times 2n \text{ formée en utilisant seulement } n \text{ vecteurs colonnes de } Z.$$

Nous allons montrer que toute solution P^* peut se mettre sous la forme $P^* = Y^* \cdot X^{*-1}$, à condition que X^{*-1} existe.

Soit donc P^* une solution de (25). Considérons :

$$G = - (A + \alpha I)^T + D^T Q D P^*$$

on aura :

$$P^* G = - P^* (A + \alpha I)^T + P^* D^T Q D P^*$$

soit, en utilisant (25) :

$$P^* G = (A + \alpha I) P^*$$

Supposons qu'il existe une transformation qui met G sous la forme diagonale V (si les valeurs propres de G sont multiples, on supposera que la forme de JORDAN est diagonale).

Posons :

$$W = P^* S \quad \text{avec} \quad S^{-1} G S = V$$

Il s'en suit :

$$G = S V S^{-1}$$

$$P^* = W S^{-1}$$

Calculons le produit $P^* G$:

$$P^* G = (A + \alpha I) P^* = W \cdot V \cdot S^{-1}$$

Par suite :

$$W \cdot V = (A + \alpha I) P^* S = (A + \alpha I) W \quad (26)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} S \cdot V &= G \cdot S \\ &= - (A + \alpha I)^T S + D^T Q D P S \end{aligned}$$

soit encore :

$$S \cdot V = - (A + \alpha I)^T S + D^T Q D W \quad (27)$$

Regroupons ces deux résultats sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} S \\ W \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} -(A + \alpha I)^T & D^T Q D \\ 0 & A + \alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ W \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} S \\ W \end{bmatrix}$$

Or, la matrice V est une forme diagonale de G . Elle est donc constituée par les valeurs propres de G .

Soit λ_i une de ces valeurs propres, et $\underline{x}_i$ un vecteur colonne

de $\begin{bmatrix} S \\ \hline W \end{bmatrix}$;

on aura donc :

$$\lambda_i \underline{x}_i = M \underline{x}_i$$

Par conséquent, λ_i est également valeur propre de M et $\underline{x}_i$ est le vecteur propre qui lui est associé.

Donc, si λ_i a le même ordre de multiplicité dans G et dans M, les vecteurs colonnes de la matrice :

$$\begin{bmatrix} S \\ \hline W \end{bmatrix}$$

sont des vecteurs propres de M.

$$\begin{bmatrix} S \\ \hline W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^* \\ \hline Y \end{bmatrix}$$

Si la forme de JORDAN associée à G est diagonale, cette condition est alors réalisée.

Or, nous avons :

$$P^* = W S^{-1}$$

Donc :

$$P^* = Y \cdot X^{-1}$$

(28)

Pour que X^{*-1} existe, une condition nécessaire et suffisante est que le système :

$$\underline{\dot{w}} = (A + \alpha I) \underline{w}$$

$$\underline{z} = D \underline{w}$$

soit observable.

Soit T une transformation permettant de mettre la matrice $(A + \alpha I)$ sous la forme diagonale J.

$$T(A + \alpha I) T^{-1} = J$$

avec :

$$\underline{\pi} = T \underline{w}$$

on tire :

$$\underline{z} = D T^{-1} \underline{\pi}$$

Le mode μ_i de $(A+\alpha\mathbb{I})$ est observable si, et seulement si, la $i^{\text{ème}}$ colonne de D^T possède au moins un élément non nul.

Soit μ_j un mode non observable de $(A+\alpha\mathbb{I})$ par l'intermédiaire de D .

μ_j est également valeur propre de M , et son vecteur propre associé est de la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \underline{y}_j \end{bmatrix}$$

En effet :

$$M \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{y}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(A+\alpha\mathbb{I})^T & D^T Q D \\ 0 & A+\alpha\mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{y}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^T Q D \underline{y}_j \\ (A+\alpha\mathbb{I}) \underline{y}_j \end{bmatrix}$$

$$= \mu_j \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{y}_j \end{bmatrix}$$

Donc, à un mode non observable de $(A+\alpha\mathbb{I})$ correspond un vecteur colonne de X^* formé de 0. La matrice X^* est alors singulière.

En résumé : il existe une solution permanente P^* de $P(a)$ autre que $P = 0$, à condition que la matrice $(A+\alpha\mathbb{I})$:

- ait des valeurs propres $\mu_j \neq -\mu_k \quad \forall i \text{ et } k \in [1, n]$
- ait tous ses modes observables par l'intermédiaire de D .

P^* peut alors se mettre sous la forme :

$$P^* = Y^* X^{*-1}$$

3,24 - Condition pour que P^* soit définie positive symétrique

Rappelons (25) que vérifie P^* :

$$P^* (A+\alpha\mathbb{I})^T + (A+\alpha\mathbb{I}) P^* - P^* D^T Q D P^* = 0 \quad (25)$$

Recherche d'une condition nécessaire

Supposons que le système :

$$\dot{\underline{\rho}} = -(A+\alpha\mathbb{I}) \underline{\rho} \quad (29)$$

est uniformément asymptotiquement stable.

Pour que :

$$V(\underline{\rho}) = \underline{\rho}^T L \underline{\rho} \quad (30)$$

soit une fonction de LYAPONNOV pour ce système, il faut que la matrice L soit telle que :

$$V(\underline{\rho}) = \underline{\rho}^T L \underline{\rho} > 0 \quad \forall \underline{\rho}$$

ce qui entraîne L définie positive.

$$\dot{V}(\underline{\rho}) = - \underline{\rho}^T [(A+\alpha I)^T L + L(A+\alpha I)] \underline{\rho} < 0$$

$$\dot{V}(\underline{\rho}) = 0 \Rightarrow \underline{\rho} = 0$$

Donc :

$$(A+\alpha I)^T L + L(A+\alpha I)$$

doit être définie positive.

$$P^{*-1} = R^* \text{ vérifie (24) :}$$

$$R^*(A+\alpha I) + (A+\alpha I)^T R^* = D^T Q D \quad (24)$$

Q est par hypothèse choisie définie positive, symétrique. Il en résulte que si R^* est définie positive, R^* vérifie les conditions pour que :

$$V(\underline{\rho}) = \underline{\rho}^T R^* \underline{\rho}$$

soit une fonction de LYAPONNOV pour le système (29).

Donc, une condition nécessaire pour que R^* soit définie positive est donc que le système (29) soit uniformément asymptotiquement stable.

Soit encore, d'après la forme de (29), $(A+\alpha I)$ définie positive, c'est-à-dire que les valeurs propres de $(A+\alpha I)$ doivent être positives, ou à partie réelle positive.

$$R_e(\mu_j) > 0 \quad \text{ou} \quad \mu_j > 0$$

3,25 - Construction de la solution permanente définie positive

Nous avons vu qu'une solution P^* permanente peut être construite à partir de n vecteurs propres de la matrice M .

$$\text{Soit } P^* = Y^* X^{*-1},$$

$$\begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \end{bmatrix} \text{ étant associés à } n \text{ valeurs propres } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ de } M.$$

Nous allons montrer que si P^* ou R^* est définie positive symétrique, alors $R_e(\lambda_i) > 0$.

Soit G une matrice précédemment définie par :

$$G = - (A + \alpha I)^T + D^T Q D P^* \quad (31)$$

à l'aide de (25), on montre que :

$$P^* G + G^T P^* = P^* D^T Q D P^*$$

Il en résulte que, si P^* est définie positive, elle assure la stabilité asymptotique de la matrice $-G$ (d'après LYAPOUNOV).

Donc, si P^* est définie positive symétrique, les valeurs propres de G sont à partie réelle positive. Nous avons montré précédemment que les valeurs propres de G sont aussi valeurs propres de M .

Il en résulte qu'une solution P^* définie positive devra être construite à partir de n valeurs propres à partie réelle positive de M . Or, les $2n$ valeurs propres de M sont formées des n valeurs propres de $(A + \alpha I)$, (μ_j) et des n valeurs propres de $-(A + \alpha I)^T$, $(-\mu_j)$, $j = (1 \dots n)$.

Il résulte qu'il n'y a qu'une seule façon possible de choisir n valeurs propres à partie réelle positive parmi les $2n$ valeurs propres de M .

En outre, une condition nécessaire pour que P^* soit définie positive est que les n valeurs propres de $(A + \alpha I)$ soient positives ou à partie réelle positive.

En conclusion :

P^* définie positive existe à condition que $(A + \alpha I)$ ait toutes ses valeurs propres positives, ou à partie réelle positive. Les μ_j sont alors également valeurs propres de $G = - (A + \alpha I)^T + D^T Q D P^*$, et de M .

P^* peut se mettre sous la forme $Y^* X^{*-1}$

$\begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \end{bmatrix}$ étant les n vecteurs propres de M , associés aux μ_j .

X^{*-1} n'existe que si tous les modes de $\dot{\underline{p}} = + (A + \alpha I) \underline{p}$ sont observables par l'intermédiaire de D .

Remarque : si P^* existe, il peut être plus simple de calculer au préalable R^* à l'aide de (24). En effet, il ne s'agit là que de résoudre un système linéaire.

3,26 - Stabilité de la solution permanente définie positive

Soit (16) :

$$P_a(a) = (A + \alpha I) P(a) + (A + \alpha I)^T P(a) - P(a) D^T Q D P(a)$$

et (25) :

$$P^* (A + \alpha I) + (A + \alpha I)^T P^* - P^* D^T Q D P^* = 0$$

Supposons que P^* soit définie positive symétrique.

Posons :

$$P(a) = P^* + p(a)$$

En portant dans (16), on obtient :

$$p_a(a) = p(a) [(A + \alpha I)^T - D^T Q D P^*] + [(A + \alpha I) - P^* D^T Q D] p(a) - p(a) D^T Q D p(a)$$

que l'on peut également écrire sous la forme :

$$p_a(a) = p(a) [(A + \alpha I)^T - D^T Q D P^*] + [(A + \alpha I) - P(a) D^T Q D] p(a)$$

$P(a)$ étant symétrique :

$$p_a(a) = p(a) [(A + \alpha I)^T - D^T Q D P(a)] + [(A + \alpha I) - P^* D^T Q D] p \quad (32)$$

D'après (31) :

$$G = - (A + \alpha I)^T + D^T Q D P^*$$

nous noterons :

$$G = - G^{*T} \quad (33)$$

$$G_p = (A + \alpha I) - P D^T Q D \quad (34)$$

soit, en portant dans (32) :

$$p_a(a) = p G_p^T - G_p^T p = p G_p^T + G_p^* \quad (35)$$

Soit Φ_{G_p} et Φ_{G^*} les matrices de transition associées aux systèmes définis par G_p et G^* .

La solution générale de (35) peut alors s'écrire :

$$p(a) = \Phi_{G^*}(a, a_0) p(a_0) \Phi_{G_p}^T(a, a_0) \quad (36)$$

On dira que P^* est stable et constitue un point d'attraction pour les solutions $P(a)$ si $p(a) \rightarrow 0$ lorsque $a \rightarrow \infty$.

Appliquons l'inégalité de SCHWARTZ à (36) :

$$||p(a)|| < ||\Phi_{G^*}(a, a_0)|| \times ||p(a_0)|| \times ||\Phi_{G_p}^T(a, a_0)|| \quad (37)$$

Si Λ est l'initialisation $P(a_0)$, $p(a_0) = \Lambda - P^*$, et par suite $||p(a_0)||$ est bornée, car la norme de P^* est bornée ($\exists R^* \neq 0$).

D'autre part, par définition :

$$G^* = -G^T$$

Si P^* est définie positive, nous avons vu que les valeurs propres de G sont à partie réelle positive.

$-G^T = G^*$ est la matrice adjointe de G .

Donc, les valeurs propres de G^* sont à partie réelle négative. $\Phi_{G^*}(a, a_0)$ est donc la matrice de transition d'un système stable (uniformément asymptotiquement).

Il en résulte que $||\Phi_{G^*}(a, a_0)|| \rightarrow 0$ lorsque $a \rightarrow \infty$ (38)

Reste donc à étudier $||\Phi_{G_p}^T(a, a_0)||$. Pour montrer que cette norme est bornée, nous montrerons comme précédemment que $\Phi_{G_p}^T(a, a_0)$ est la matrice de transition d'un système stable.

D'après (34) :

$$G_p = (A + \alpha I) - P D^T Q D$$

Soit le système suivant :

$$\underline{\bar{\omega}}'_a = [(A + \alpha I) - P D^T Q D] \underline{\bar{\omega}} \quad (39)$$

Soit :

$$R(a) = P^{-1}(a)$$

Si l'on initialise convenablement (voir 3,1), $R(a)$ est définie positive.

Donc :

$$\underline{\bar{\omega}}'' R(a) \underline{\bar{\omega}} > 0$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} (\bar{\omega}^T R(a) \bar{\omega}) &= \bar{\omega}_a^T R(a) \bar{\omega} + \bar{\omega}^T R(a) \bar{\omega}_a \\ &\quad + \bar{\omega}^T R_a(a) \bar{\omega} \\ &= \bar{\omega}^T [(A+\alpha I)^T R(a) - D^T Q D + R(a) (A+\alpha I) - D^T Q D + R_a(a)] \bar{\omega} \end{aligned} \quad (40)$$

Or, d'après (17) :

$$R_a(a) = -R(a) (A+\alpha I) - (A+\alpha I)^T R(a) + D^T Q D$$

Si nous portons dans (40), il vient :

$$\frac{d}{da} [\bar{\omega}^T R(a) \bar{\omega}] = -\bar{\omega}^T D^T Q D \bar{\omega} \quad (41)$$

Il en résulte donc que $\bar{\omega}^T R^*(a) \bar{\omega}$ est une fonction de LYAPOUNOV pour le système (39).

Par suite, la matrice de transition $\Phi_{G_p}(a, a_0)$ est la matrice de transition d'un système stable. Sa norme est donc bornée lorsque $a \rightarrow \infty$.

Donc, si nous faisons tendre $a \rightarrow \infty$, il résulte, d'après (37), que $p(a) \rightarrow 0$.

Par suite :

$$\lim_{a \rightarrow \infty} P(a) = P^*$$

et cette limite est stable.

3,27 - Rappels de l'ensemble des propriétés de P^*

Si la matrice $(A+\alpha I)$ a toutes ses valeurs propres à partie réelle positive, non nulle.

Si tous les modes de $(A+\alpha I)$ sont observables par l'intermédiaire de D .

La fonction poids $P(a)$ admet une valeur limite P^* différente de 0. Cette limite est alors définie positive symétrique. Elle est stable et constitue un point d'attraction pour les solutions $P(a)$, quelle que soit l'initialisation Λ de l'équation de RICCATI (16), sous réserve que Λ satisfait les conditions (suffisantes) énumérées en 3,15.

Cette solution limite peut être calculée directement sans passer par l'intégration de (16),

- soit à partir des n vecteurs propres de M (méthode exposée en 3,25),

- soit à partir de (24) qui est une équation algébrique linéaire, fournissant $(P^*)^{-1}$.

Remarquons que la condition, valeurs propres de $(A + \alpha I)$ à parties réelles positives, généralise la condition obtenue en 3,1, sur l'exemple qui était $\alpha + \beta > 0$.

4 - STABILITE DU FILTRE -

Rappelons quelle est l'équation d'estimation (13) :

$$\frac{d\underline{e}}{da} = A \underline{e}(a) + B \underline{u}(a) + P(a) D^T Q [z(a) - D \underline{e}(a)]$$

Les grandeurs d'entrée du processus $\underline{u}(a)$, ainsi que les grandeurs mesurées à la sortie $\underline{z}(a)$, sont supposées connues pour tout a .

Pour étudier la stabilité du filtre, on se bornera à étudier le régime libre.

Plaçons nous dans les hypothèses où $P(a)$ et P^* existent et sont définies positives symétriques.

Le régime libre est alors caractérisé par l'équation différentielle :

$$\frac{d\underline{e}^*}{da} = [A - P(a) D^T Q D] \underline{e}^*(a) \quad (42)$$

Pour montrer que ce système est uniformément asymptotiquement stable, nous allons montrer que :

$$V(\underline{e}^*) = \underline{e}^{*T} R(a) \underline{e}^*$$

vérifie les conditions de LYAPOUNOV.

- Si $R(a)$ est définie positive, on a bien :

$$\begin{aligned} V(\underline{e}^*) &> 0 \\ V(\underline{e}^*) &= 0 \Rightarrow \underline{e}^* = 0 \end{aligned}$$

- Calculons :

$$\frac{dV}{da}(\underline{e}^*)$$

$$\frac{d}{da} V(\underline{e}^*) = \underline{e}_a^{*T} R(a) \underline{e} + \underline{e}^{*T} R(a) \underline{e}^* + \underline{e}^{*T} R_a(a) \underline{e}^*$$

Soit, à l'aide de (42) et de (17) :

$$\frac{d}{da} (V(\underline{e}^*)) = - \underline{e}^{*T} [D^T Q D + 2\alpha R(a)] \underline{e}^*$$

α étant choisi "a priori" positif, Q et $R(a)$ étant définies positives, il résulte donc que le système (42) est uniformément asymptotiquement stable.

Un calcul similaire montre évidemment que le régime permanent de ce filtre est également uniformément asymptotiquement stable.

5 - CHOIX DU COEFFICIENT α -

Les résultats précédents montrent que le filtre optimal converge vers un filtre stationnaire dont on peut calculer le gain (3,27). On peut donc calculer au préalable ce gain pour ne mettre en oeuvre que le filtre stationnaire et, au bout de quelques constantes de temps ($\frac{1}{\alpha}$), les résultats seront identiques aux résultats optimaux.

Il est intuitif de voir que le "temps de réponse" du filtre stationnaire est directement lié à la constante de temps $\frac{1}{\alpha}$, mais, afin de guider le choix de l'utilisateur, nous allons préciser cette relation.

Soit, donc, le filtre stationnaire en régime libre, défini par les équations :

$$\frac{d\underline{e}}{da} = (A - P^* D^T Q D) \underline{e} \quad (43)$$

Une première restriction dans le choix de α est donnée par la condition $(A + \alpha I)$ définie positive.

Soit λ_i une valeur propre de A

($i = 1, n$)

et μ_i une valeur propre de $A + \alpha I$

Il est clair que :

$$\mu_i = \lambda_i + \alpha$$

La première condition que doit remplir α est donc :

$$\Re e(\lambda_i) + \alpha > 0 \quad (44)$$

La constante de temps de pondération du critère $\frac{1}{\alpha}$ doit être inférieure aux constantes de temps naturelles du modèle :

$$\frac{1}{\Re e^{(-\lambda_i)}}$$

(nous supposons que le modèle est stable et donc que ses valeurs propres sont à parties réelles négatives).

Précisons maintenant quelles sont les valeurs propres de la matrice :

$$A - P^* D^T Q D = S$$

Nous avons établi en (3,2) que les valeurs propres de :

$$G = -(A + \alpha \mathbb{I})^T + D^T Q D P^*$$

étaient les valeurs propres de M à partie réelle positive.

Les valeurs propres de M étant μ_i et $-\mu_i$, G admet μ_i comme valeur propre.

Donc :

μ_i est valeur propre de $A + \alpha \mathbb{I}$

$$\mu_i \text{ est valeur propre de } -(A + \alpha \mathbb{I})^T + D^T Q D P^* \quad (45)$$

De (45), il résulte que :

$$\begin{aligned} \mu_i \text{ est valeur propre de } -(A + \alpha \mathbb{I}) + P^* D^T Q D \\ = -A + P^* D^T Q D - \alpha \mathbb{I} \end{aligned} \quad (46)$$

Par suite, les valeurs propres de $-A + P^* D^T Q D$ sont $\mu_i + \alpha$.

Or :

$$S = A - P^* D^T Q D = -[-A + P^* D^T Q D]$$

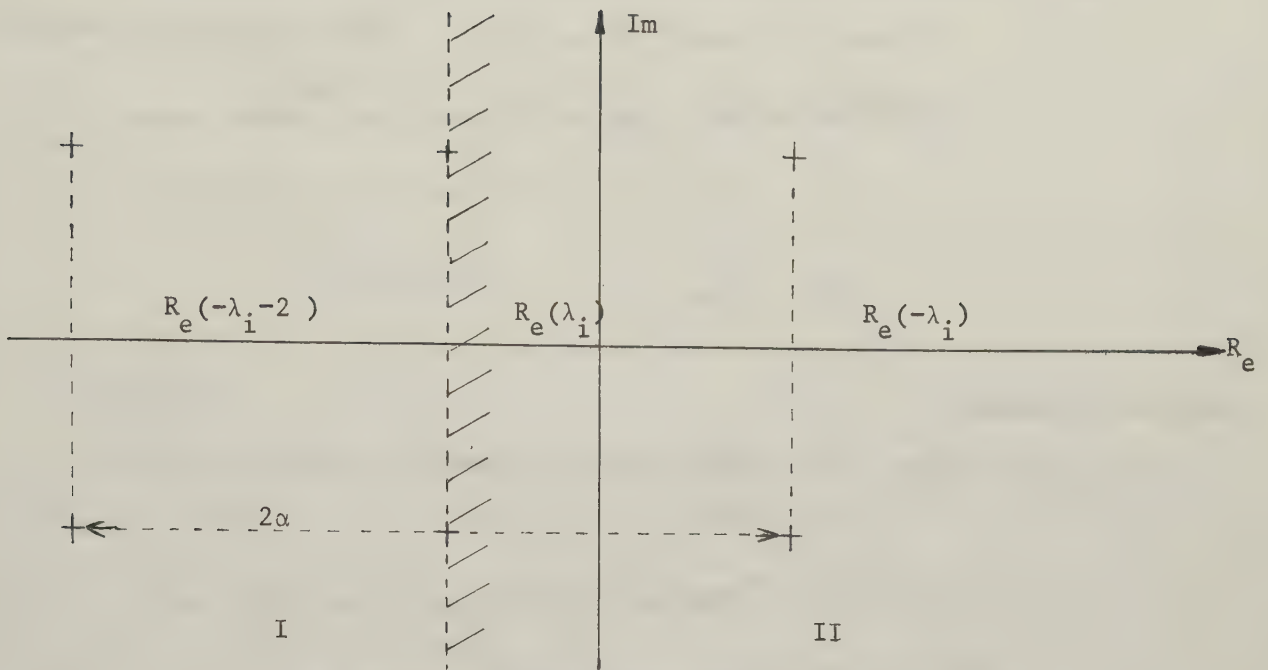
Les valeurs propres de S sont donc :

$$-(\mu_i + \alpha) \quad (i = 1, n)$$

soit, en fonction des valeurs propres de A :

$$-\lambda_i - 2\alpha$$

Donc, si λ_i est un mode de la matrice A, $-\lambda_i - 2\alpha$ est le mode correspondant du filtre stationnaire.



Soit λ^* la valeur propre de A telle que :

$$R_e(-\lambda^* - 2\alpha) = \max_i R_e(-\lambda_i - 2\alpha) \quad \forall i \in [1, n]$$

$$\forall \alpha > 0$$

On peut donc régler le temps de réponse du filtre stationnaire en imposant le placement de $-\lambda^* - 2\alpha$.

5,2 - Un exemple élémentaire

Considérons un processus monovariable dont la sortie mesurée est $z(\tau)$, et dont le modèle mathématique est constitué par un double intégrateur.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

La sortie observée sur le modèle est :

$$s = x_1$$

Cherchons quelles sont les équations du filtre stationnaire, on a :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = [1, 0]$$

On prendra Q matrice de pondération = 1.

Calculons R^* en utilisant (17) :

$$R^*(A + \alpha I) + (A + \alpha I)^T R^* = D^T Q D \quad (17)$$

La résolution de ces équations algébriques conduit alors à :

$$R^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\alpha} & \frac{-1}{4\alpha^2} \\ \frac{-1}{4\alpha^2} & \frac{1}{4\alpha^3} \end{bmatrix}$$

soit, en inversant :

$$P^* = \begin{bmatrix} 4\alpha & 4\alpha^2 \\ 4\alpha^2 & 8\alpha^3 \end{bmatrix}$$

On vérifie que P^* est bien définie positive symétrique si $\alpha > 0$.

Le filtre stationnaire est alors donné par :

$$\frac{de}{da} = (A - P^* D^T Q D) \underline{e} + \underline{b} u + P D^T Q z$$

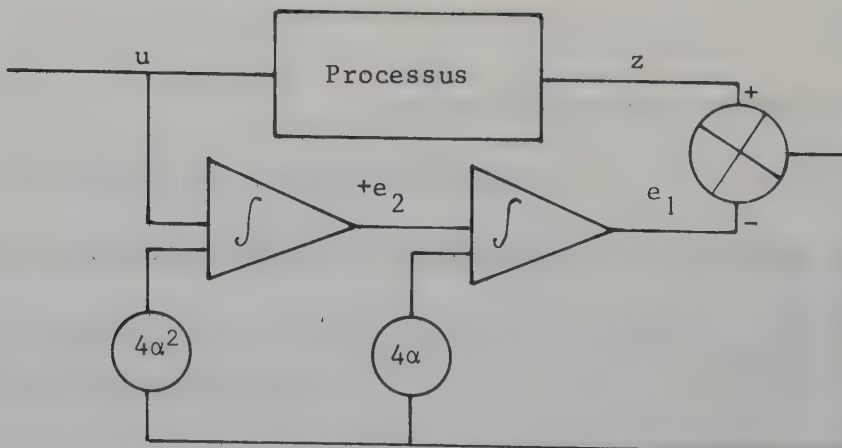
Le gain du filtre est $P^T D^T Q$ donné par :

$$P^* D^T Q = \begin{bmatrix} 4\alpha \\ 4\alpha^2 \end{bmatrix}$$

Finalement, l'ensemble des équations d'estimation est alors :

$$\frac{de}{da} = \begin{bmatrix} -4\alpha & 1 \\ -4\alpha^2 & 0 \end{bmatrix} \underline{e} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 4\alpha \\ 4\alpha^2 \end{bmatrix} z$$

On vérifie aisément que ce filtre stable et que ses pôles sont -2α ; ce qui représente bien $-\lambda_1 - 2\alpha$.



Les pôles du filtre stationnaire sont doubles et l'on aura pour ce système du second ordre :

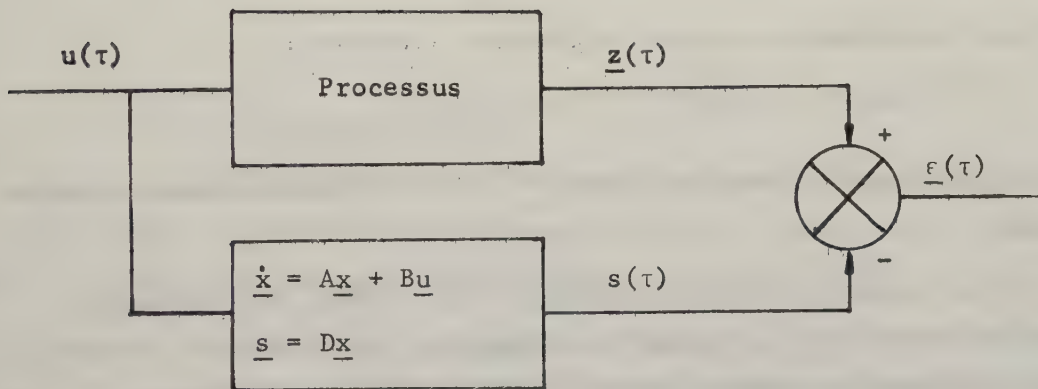
$$t_r = \frac{4}{2\alpha} \quad \text{avec } t_r = \text{temps de réponse à 2 \%}$$

Par suite, on choisira :

$$\alpha = \frac{2}{(t_r)_{\text{désiré}}}$$

6 - CONCLUSION -

Pour un processus (π) dont le signal de sortie effectivement observé est $\underline{z}(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq a$,



et que l'on décrit à l'aide du modèle :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = A \underline{x} + B \underline{u} \\ \underline{s}(\tau) = D \underline{x}(\tau) \end{cases}$$

nous avons défini comme estimation optimale de l'état, à un instant a , un vecteur $\underline{e}(a)$, tel que le critère :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^a ||\underline{z}(\tau) - D \underline{x}(\tau)||_Q^2 e^{2\alpha(\tau-a)} d\tau$$

soit minimum.

Les équations de filtrage, que nous avons obtenu par Immersion Invariante, sont alors les suivantes :

$$\frac{de}{da} = A \underline{e}(a) + B \underline{u}(a) + P(a) D^T Q [\underline{z}(a) - D \underline{e}(a)] \quad (13)$$

$$P_a(a) = P(a) (A + \alpha I)^T + (A + \alpha I) P(a) - P(a) D^T Q D P(a) \quad (16)$$

Si α est tel que la matrice $(A + \alpha I)$ a toutes ses valeurs propres à parties réelles positives, non nulles, et si $(A + \alpha I)$, D constitue un couple complètement observable, la matrice $P(a)$ admet un régime permanent P^* lorsque $a \rightarrow \infty$.

P^* est alors définie positive et constitue un point d'attraction pour les solutions $P(a)$.

P^* peut être calculée directement sans passer par l'intégration de l'équation de RICCATI (16),

- soit à partir des valeurs propres de la matrice hamiltonienne associée à (16), M (voir 3,25),

- soit par résolution du système algébrique linéaire :

$$P^{*-1} (A + \alpha I) + (A + \alpha I)^T P^{*-1} = D^T Q D$$

Le filtre stationnaire construit avec P^* est alors uniformément asymptotiquement stable.

Si λ^* est la valeur propre de la matrice A du modèle, dont la partie réelle est la plus grande ($R_e(\lambda^*)$ positif ou négatif), $-\lambda^* - 2\alpha$ est la valeur propre du filtre stationnaire dont la partie réelle est la plus grande.

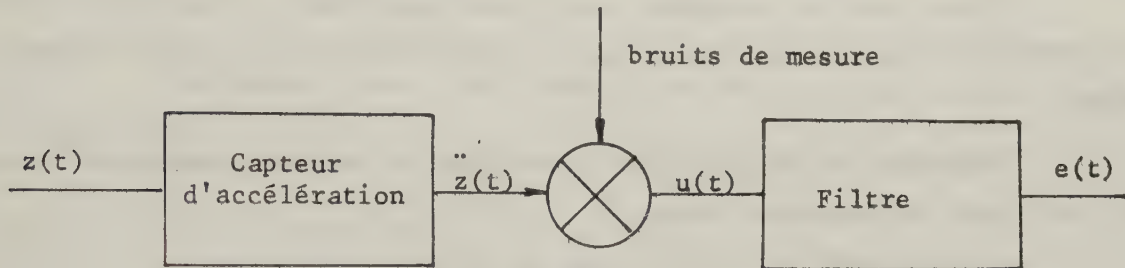
Le choix de α place donc ce pôle de façon arbitraire et permet de régler le temps de réponse du filtre.

7 - MISE EN OEUVRE PRATIQUE -

7,1 - Définition du problème

Le problème que nous envisageons concerne la reconstitution d'un signal z que l'on suppose à valeur moyenne nulle, à partir d'une mesure bruitée de sa dérivée seconde.

Il peut être schématisé par la figure suivante :



7,2 - La mise en équation

Pour obtenir une estimation optimale, au sens du critère que nous avons défini, il faudrait connaître le signal de sortie du processus. Or, c'est précisément ce signal que nous cherchons à reconstituer.

Nous sommes donc conduit à modifier la forme du critère, et, pour cela, nous utiliserons l'information selon laquelle ce signal $z(\tau)$ est à valeur moyenne nulle. Nous dirons donc que le filtre que nous recherchons est optimal si sa sortie $s(t)$ est telle que le critère :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t s^2(\tau) e^{2\alpha(\tau-t)} d\tau \quad \begin{matrix} \alpha > 0 \\ \tau \in [t_0, t] \end{matrix}$$

est minimum.

D'autre part, en l'absence de bruits sur le capteur d'accélération, le meilleur modèle pour reconstituer le signal $z(t)$ est évidemment constitué par un double intégrateur. En effet, dans ce cas, le dernier état $x_1(t)$ et le signal $z(t)$ cherché ont même accélération.

D'où le modèle choisi :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad s(\tau) = x_1(\tau)$$

7,3 - Calcul du filtre stationnaire

Le modèle peut donc s'écrire :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = A \underline{x} + \underline{b} u$$

$$s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} = D \underline{x}$$

Il est aisé de constater que la matrice $(A+\alpha I)$ a toutes ses valeurs propres à parties réelles positives et que le couple $(A+\alpha I), D$ est complètement observable.

L'équation de RICCATI (16) admet donc un régime permanent P^* conduisant à un filtre stationnaire stable.

Calculons $P^{*-1} = R^*$ à l'aide de (17) :

$$R^*(A+\alpha I) + (A+\alpha I)^T R^* = -D^T Q D$$

ce qui nous conduit ici à :

$$R^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\alpha} & \frac{-1}{4\alpha^2} \\ \frac{-1}{4\alpha^2} & \frac{1}{4\alpha^3} \end{bmatrix}$$

Le filtre stationnaire est alors donné par :

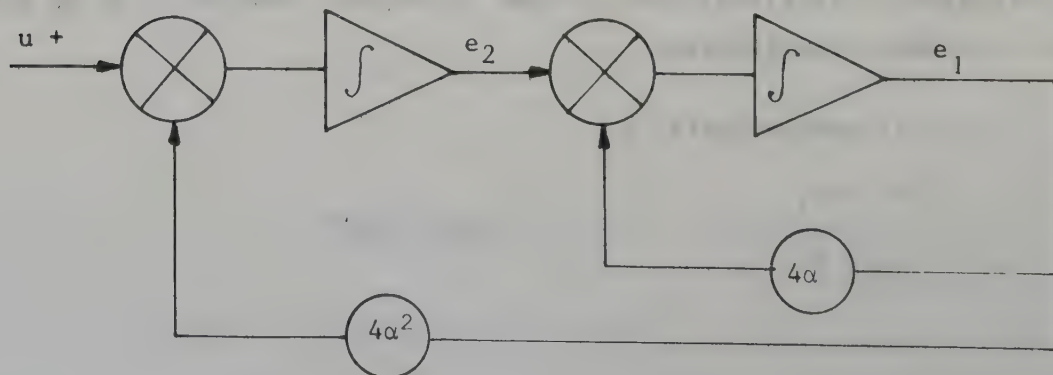
$$\frac{de}{dt} = (A - P^* D^T Q D) \underline{e} + \underline{b} u$$

soit, d'après le calcul effectué en 5,2 :

$$\frac{de}{dt} = \begin{bmatrix} -4\alpha & 1 \\ -4\alpha^2 & 0 \end{bmatrix} \underline{e} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

7,4 - Mise en oeuvre du filtre stationnaire

La structure du filtre est donc la suivante :



La matrice A du modèle a deux valeurs propres doubles et nulles.

D'après les résultats obtenus en 5,1, on tire que la matrice du filtre stationnaire a des valeurs propres doubles et égales à -2α .

Ce filtre stationnaire est donc un système du second ordre à amortissement critique, dont le temps de réponse à 2 % est donné par :

$$t_r = \frac{4}{2\alpha}$$

On choisit donc α en fonction du temps de réponse désiré, à l'aide de la relation :

$$\alpha = \frac{2}{t_r}$$

Dans la mise en oeuvre pratique, nous avons pris $t_r = 60$ s (10 fois la période moyenne observée sur le signal d'accélération).

Ce qui nous conduit à prendre $\alpha = \frac{1}{30}$.

L'enregistrement que nous présentons donne successivement :

- le signal d'accélération mesuré $\ddot{z}(t)$
- le signal de sortie exact $z(t)$
- l'estimation optimale $e(t)$ de $z(t)$
- le signal d'écart $\epsilon(t) = e(t) - z(t)$

et permet de constater :

- que les transitoires rencontrés lors de la mise en route du filtre stationnaire sont d'une durée extrêmement proche de la durée souhaitée $t_r = 60$ s

- que la valeur finale moyenne de l'écart est non nulle. Ce défaut prévisible est dû au gain statique très grand du filtre (ici $\frac{1}{4\alpha} = 225$) qui amplifie considérablement la moindre erreur de composante continue sur la mesure $\ddot{z}$.

Ce défaut peut néanmoins être évité en considérant cette composante continue comme une variable d'état supplémentaire à estimer.

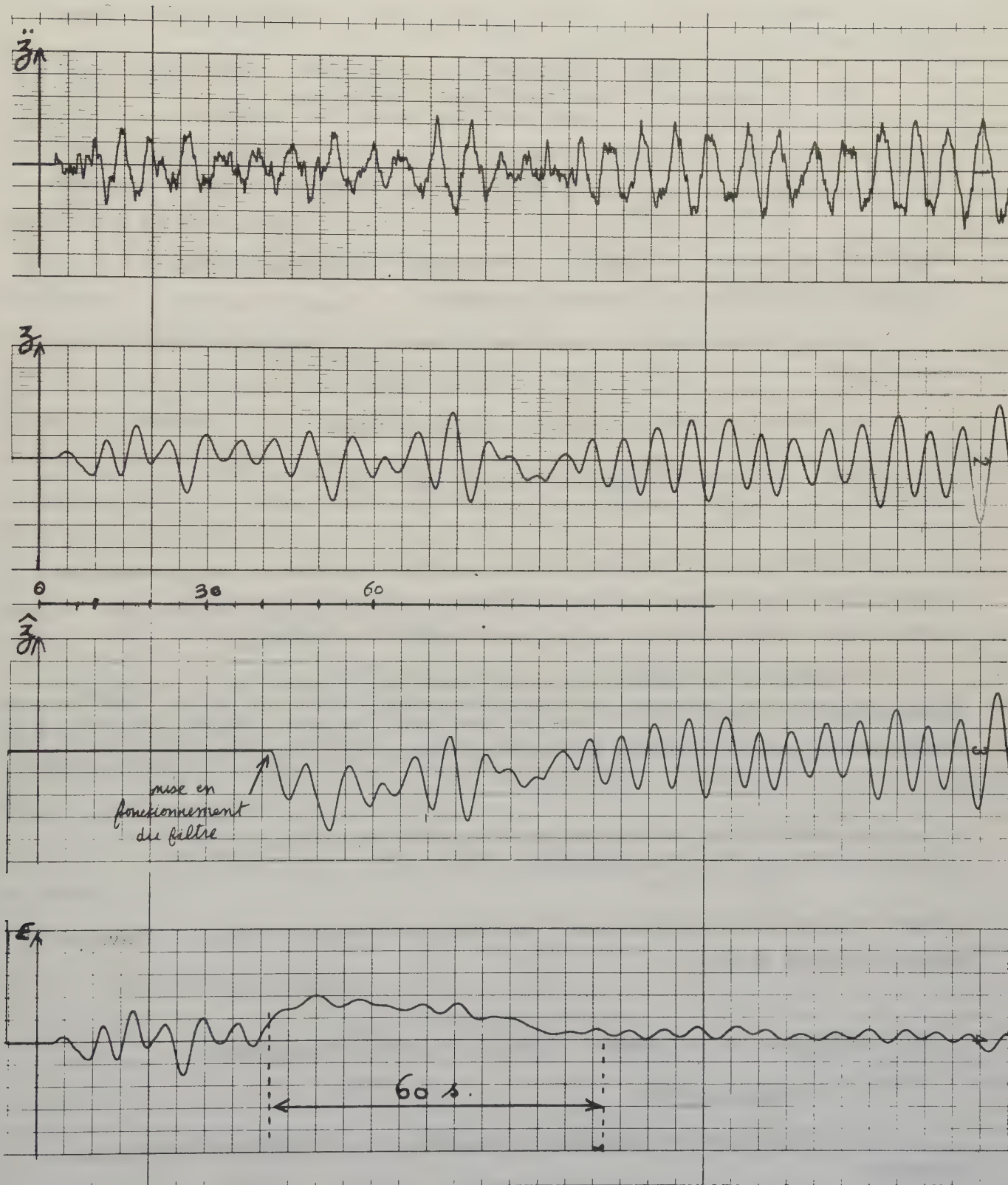
7,5 - Conclusion

Bien que cet exemple reste très élémentaire, il n'en contribue pas moins à mettre en évidence les principaux avantages de ce filtre :

- le nombre des coefficients du critère est restreint et chacun possède une signification immédiate. Ici α permet de régler la durée des transitoires,

- le filtre stationnaire est obtenu directement en n'effectuant qu'un minimum de calculs algébriques,

- la mise en oeuvre ne requiert aucune donnée d'ordre statistique.



B - COMMANDE OPTIMALE -

1 - INTRODUCTION -

τ désigne toujours la variable temps, mais l'instant présent t représente cette fois un instant initial.

Soit un processus (π) représenté par les équations :

$$\frac{dx}{d\tau} = A \underline{x}(\tau) + B \underline{u}(\tau)$$

$$\underline{s}(\tau) = C \underline{x}(\tau)$$

où $\underline{x}(\tau)$ est un vecteur de dimension n désignant l'état du processus (π) et $\underline{s}(\tau)$ un vecteur de dimension m désignant la mesure.

Soit $\underline{g}(\tau)$ une consigne entièrement connue à l'avance sur tout l'intervalle $[t, T]$.

Le critère de performance est pris de la forme :

$$J = \frac{1}{2} \int_t^T ||\underline{g}(\tau) - \underline{s}(\tau)||_Q^2 p(t, \tau) d\tau$$

Si, pour ce critère, nous sommes capables de calculer une commande en boucle fermée, les erreurs sur les différentes sorties interviendront peu, à long terme, car les informations à venir permettront de les corriger.

Par contre, la pondération $p(t, \tau)$ devra être grande sur un "horizon" donné autour de t dans la direction du futur, et l'on peut a priori estimer cet intervalle de temps de l'ordre du temps de réponse désiré pour le système commandé.

La fonction de pondération que nous avons choisie est :

$$p(t, \tau) = e^{2\alpha(t-\tau)}$$

α étant une constante positive que l'on fixe a priori de l'ordre de l'inverse du temps de réponse désiré.

2 - DEFINITION DE LA COMMANDE OPTIMALE DUALE DE L'ESTIMATION -

2,1 - Dualité directe

Reprenons les équations du modèle et le critère que nous avons proposé :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(\tau) = A(\underline{x}(\tau)) + B \underline{u}(\tau) \\ \underline{s}(\tau) = C \underline{x}(\tau) \end{cases}$$

$$J = \frac{1}{2} \int_t^T ||\underline{u}(\tau) - \underline{s}(\tau)||_Q^2 e^{2\alpha(t-\tau)} d\tau$$

Considérons $\underline{u}(\tau)$ non pas comme une commande mais comme une perturbation, non seulement donnée mais aussi parfaitement prédictible.

La dualité directe avec le problème d'estimation traité en 3 - A nous conduit à rechercher l'état initial $\underline{\hat{x}}(t)$, à partir duquel il faut lâcher le système pour que la sortie soit aussi proche que possible de la consigne sur un horizon donné et fixé par α .

On peut alors, en reprenant les méthodes développées en 3 - A, déterminer le système d'équations différentielles auquel obéit la valeur optimale $\underline{\hat{x}}(t)$. Pour calculer $\underline{\hat{x}}(t)$, il faut connaître les valeurs futures de $\underline{u}(\tau)$ et $\underline{s}(\tau)$.

Toutefois, posé en ces termes, ce problème ne constitue pas un problème de commande.

En effet : à l'instant t , le système est dans un état initial $\underline{x}(t)$ différent de $\underline{\hat{x}}(t)$ et l'on ne dispose d'aucune entrée manipulable pour amener $\underline{x}(t)$ à être égal à $\underline{\hat{x}}(t)$.

2,2 - Mise en équation définitive

La dualité directe avec le problème d'estimation conduit à rechercher un état initial optimal. Pour que l'on soit en présence d'une méthode permettant la synthèse d'une commande, il faut donc considérer $\underline{u}(\tau)$ non plus comme une perturbation inconnue mais comme un état supplémentaire, dont on estime la valeur initiale optimale.

On impose donc à $\underline{u}(\tau)$ d'être solution d'une équation différentielle en posant :

$$\underline{u} = R \underline{y} \quad \dot{\underline{y}} = T \underline{y}$$

et l'on définit l'état augmenté $\underline{z}(\tau)$:

$$\underline{z}(\tau) = \begin{bmatrix} \underline{x}(\tau) \\ \underline{y}(\tau) \end{bmatrix}$$

L'état augmenté $\underline{z}(\tau)$ est alors soumis à l'équation différentielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B R \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix} = M \underline{z}$$

soit : $\dot{\underline{z}} = M \underline{z}$ (1)

Notons que, parmi tous les choix possibles, le plus simple est d'imposer $\underline{u}(\tau) = \text{constante}$, ce qui entraîne :

$$T = 0 \quad R = \emptyset$$

Par dualité, on peut maintenant établir les algorithmes fournissant la valeur initiale optimale de $\hat{\underline{z}}$. Mais, parmi toutes les composantes de $\hat{\underline{z}}$, seules celles correspondant à la commande sont manipulables. On doit donc, en outre, tenir compte d'une contrainte égalité de la forme :

$$\underline{x}(t) = F \underline{z}(t)$$

Le problème à résoudre est donc finalement le suivant :

Etant donné le système défini par :

$$\dot{\underline{z}}(\tau) = M \underline{z}(\tau) \quad t \leq \tau \leq T \quad (1)$$

Estimer l'état initial $\hat{\underline{z}}$, tel que le critère :

$$J = \frac{1}{2} \int_t^T \|\underline{\sigma}(\tau) - D \underline{z}(\tau)\|_Q^2 e^{2\alpha(t-\tau)} d\tau \quad (2)$$

soit minimum, compte tenu de la contrainte :

$$\underline{x}(t) = F \underline{z}(t) \quad (3)$$

$\underline{\sigma}(\tau)$ étant une consigne parfaitement connue et prédictible sur $[t, T]$.

2,3 - Obtention de la commande

Soit $\hat{\underline{z}}(t)$ la valeur de $\underline{z}$ qui minimise (2) compte tenu de la contrainte (3).

La commande optimale est alors obtenue à l'aide de :

$$\hat{\underline{u}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \hat{\underline{z}}(t) \quad (4)$$

Lorsque le temps présent t évolue, on peut appliquer en permanence cette commande.

3 - DETERMINATION DES ALGORITHMES -

3,1 - Introduction

Nous avons traité en A le problème d'estimation en l'absence de contraintes du type de (3). Nous allons tout d'abord montrer que la solution

optimale du problème avec contrainte se déduit linéairement de la solution du problème sans contrainte.

Soit $\underline{\tilde{z}}(t)$ la solution du problème sans contrainte et $J(\underline{\tilde{z}}(t)) = r(t, \underline{\tilde{z}}(t))$ la valeur optimale du coût dans ce cas.

On notera $R_{zz}(t)$ la dérivée seconde de ce coût.

Lorsque le système est soumis à la contrainte :

$$\underline{\hat{x}}(t) = F \underline{\hat{z}}(t)$$

on note par $\hat{J}(t)$ le nouveau coût.

On a :

$$\hat{J}(t) = (\underline{\hat{z}} - \underline{\tilde{z}})^T R_{zz}(t) (\underline{\hat{z}} - \underline{\tilde{z}}) + J(t)$$

ψ étant un paramètre de LAGRANGE classique, si nous définissons :

$$H = \hat{J} + \underline{\psi}^T (\underline{x} - F \underline{\hat{z}})$$

H devra être minimum par rapport à $\underline{\hat{z}}$ et par rapport à $\underline{\psi}$.

Soit :

$$H_{\underline{\hat{z}}} = 0$$

$$H_{\underline{\psi}} = 0$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} H_{\underline{\hat{z}}} = R_{zz}(t) (\underline{\hat{z}} - \underline{\tilde{z}}) - F^T \underline{\psi} = 0 \\ H_{\underline{\psi}} = \underline{x} - F \underline{\hat{z}} = 0 \end{cases}$$

D'où l'on tire :

$$(\underline{\hat{z}} - \underline{\tilde{z}}) = R_{zz}^{-1}(t) F^T \underline{\psi}$$

Multiplions cette expression à gauche par F :

$$F(\underline{\hat{z}} - \underline{\tilde{z}}) = F \underline{\hat{z}} - F \underline{\tilde{z}} = \underline{x} - F \underline{\tilde{z}} = F R_{zz}^{-1} F^T \underline{\psi}$$

D'où l'on tire :

$$\underline{\psi} = (F R_{zz}^{-1} F^T)^{-1} (\underline{x} - F \underline{\tilde{z}})$$

En remplaçant $\underline{\psi}$ par cette valeur, il vient finalement :

$$\underline{\hat{z}} = \underline{\tilde{z}} + R_{zz}^{-1} F^T (F R_{zz}^{-1} F^T)^{-1} (\underline{x} - F \underline{\tilde{z}}) \quad (5)$$

On peut donc exprimer la solution $\hat{z}$ du problème avec contrainte, en fonction de la solution $\hat{z}$ du problème sans contrainte et de la dérivée seconde $R_{zz}(t)$ du critère optimal correspondant.

3,2 - Problème sans contrainte

Le problème sans contrainte est alors défini à l'aide de (1) et (2) en ignorant (3). Nous procéderons comme pour le problème d'estimation.

Soit :

$$v(a) = \frac{1}{2} \int_a^T \left\| \sigma(\tau) - D \underline{z}(\tau) \right\|^2 e^{2\alpha(a-\tau)} d\tau$$

$$a \leq \tau \leq T$$

La fonction $v(a)$ est alors soumise à l'équation différentielle :

$$v_a(a) = 2\alpha v(a) - \frac{1}{2} \left\| \sigma(a) - D \underline{z}(a) \right\|_Q^2 \quad (6)$$

$v(a)$ représente la valeur prise par une intégrale. Cette intégrale est également fonction de la valeur $\underline{z}(a)$, que l'on notera $\underline{z}(a) = \underline{c}$.

Pour tenir compte de cette dépendance, posons :

$$v(a) = r(a, \underline{c}) \quad \underline{c} \text{ quelconque}$$

Nous allons maintenant chercher l'équation différentielle qui régit :

$$r(a, c) = r(a, \underline{z}(a))$$

Pour Δ suffisamment faible, envisageons le problème voisin débutant en $a+\Delta$.

On a alors :

$$v(a+\Delta) = r[a+\Delta, \underline{z}(a+\Delta)]$$

On peut alors expliciter chaque membre de cette relation en utilisant des développements au premier ordre.

$$v(a+\Delta) = v(a) + \dot{v}(a)\Delta + O(\Delta^2)$$

$$\underline{z}(a+\Delta) = \underline{z}(a) + \dot{\underline{z}}(a)\Delta + O(\Delta^2)$$

$\dot{\underline{z}}(a)$ et $\dot{v}(a)$ sont alors calculés à l'aide de (6) et (1).

On obtient finalement :

$$r_a(a, \underline{c}) + \underline{c}^T M^T \underline{r}_c(a, \underline{c}) = 2\alpha r(a, \underline{c}) - \frac{1}{2} \left\| \underline{\sigma}(a) - D \underline{c} \right\|_Q^2 \quad (7)$$

Cette équation s'intègre à rebours à partir de la condition finale $r(T, \underline{c}) = 0$. Elle suppose que la consigne $\underline{c}(a)$ est entièrement connue sur tout l'intervalle $[a, T]$.

La valeur optimale de l'estimation est alors obtenue en écrivant :

$$\left. \frac{\partial r(a, \underline{c})}{\partial \underline{c}} \right|_{\underline{c}=\underline{e}(a)} = 0$$

L'estimation optimale est alors régit par l'équation différentielle :

$$\frac{d\underline{e}}{da} = - R_{cc}^{-1}(a, \underline{e}) \underline{r}_{ca}(a, \underline{e})$$

(Cette équation a été établie en 1 - 6 et 3 - A - 2).

On explicite alors $\underline{r}_{ca}(a, \underline{e}(a))$ à l'aide de (7), ce qui nous conduit à :

$$\frac{d\underline{e}}{da} = M \underline{e} - R_{cc}^{-1}(a, \underline{e}(a)) D^T Q [\underline{c}(a) - D \underline{e}(a)] \quad (8)$$

Posons :

$$R_{cc}^{-1}(a, \underline{e}(a)) = P(a)$$

$$\frac{d\underline{e}}{da} = M \underline{e}(a) - P(a) D^T Q [\underline{c}(a) - D \underline{e}(a)] \quad (9)$$

(9) représente l'équation d'estimation homologue de l'équation (13) du chapitre 3 - A.

En procédant de la même manière qu'en 3 - A, on établit alors l'équation différentielle de la matrice poids $P(a)$. Compte tenu de (7) on tire :

$$\dot{P}_a(a) = P(M - \alpha \mathbb{I})^T + (M - \alpha \mathbb{I}) P + P^T D^T Q D P \quad (10)$$

(9) et (10) constituent donc les équations d'estimation pour le problème sans contrainte.

3,3 - Les algorithmes définitifs

Reprenons les notations propres au problème que nous traitons, c'est-à-dire :

$$\underline{e}(a) \equiv \underline{\tilde{z}}(t) \quad a \equiv t$$

(9) et (10) s'écrivent alors :

$$\underline{\tilde{z}}(t) = M \underline{\tilde{z}}(t) - P(t) D^T Q [\underline{c}(t) - D \underline{\tilde{z}}(t)] \quad (11)$$

$$\dot{P}(t) = P(M - \alpha \mathbb{I})^T + (M - \alpha \mathbb{I}) P + P D^T Q D P \quad (12)$$

tandis que (5) devient :

$$\underline{\hat{z}}(t) = \underline{\tilde{z}}(t) + P(t) F^T (F P(t) F^T)^{-1} [\underline{x}(t) - F \underline{\tilde{z}}(t)] \quad (13)$$

La commande optimale est alors :

$$\underline{\hat{u}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \underline{\hat{z}}(t) \quad (14)$$

Les intégrations de (11) et (12) se font à rebours, depuis T jusqu'à t. Elles supposent que $\underline{\sigma}(t)$ est entièrement connue à l'avance et que ces intégrations sont stables.

L'étude de l'équation de RICCATI, associée au problème de filtrage que nous avons traité en 3 - A, permet de préciser les conditions qui sont requises :

$P(t)$ doit être une matrice définie positive symétrique ; pour cela, Λ , matrice Λ qui sert à initialiser (12), doit être choisie définie positive symétrique et de plus $(M - \alpha \mathbb{I})$ doit avoir ses valeurs propres à parties réelles négatives (notons que cette dernière condition est toujours réalisée si M est la matrice d'un système stable).

4 - OBTENTION D'UN REGULATEUR -

4,1 - Expression de la commande

Supposons maintenant que T est ∞ et que $\underline{\sigma}(\tau) = \underline{\sigma} = \text{constante}$.

Si $(M - \alpha \mathbb{I})$ a ses valeurs propres à parties réelles négatives et si le couple $[(M - \alpha \mathbb{I}), D]$ est un couple complètement observable, la "matrice poids" $P(t)$, solution de l'équation (12), admet un régime permanent P^* différent de $P = 0$. Cette limite P^* est unique et peut être calculée à l'aide de :

$$P^* (M - \alpha \mathbb{I})^T + (M - \alpha \mathbb{I}) P^* + P^* D^T Q D P^* = 0 \quad (15)$$

Le filtre stationnaire construit à l'aide de P^* est alors :

$$\underline{\tilde{z}}(t) = M \underline{\tilde{z}}(t) - P^* D^T Q [\underline{\sigma} - D \underline{\tilde{z}}(t)]$$

Mais, dans l'hypothèse $\underline{\sigma} = \text{constante}$, $\underline{\tilde{z}}(t)$ admet également un régime permanent. Notons $\underline{z}^*$ le régime permanent de $\underline{\tilde{z}}(t)$.

On a :

$$[M + P^* D^T Q D] \underline{z}^* - P^* D^T Q \underline{\sigma} = 0 \quad (16)$$

soit :

$$\underline{z}^* = [M + P^* D^T Q D]^{-1} P^* D^T Q \underline{\sigma} \quad (17)$$

Si nous remplaçons $P(t)$ par P^* et $\hat{z}(t)$ par $\underline{z}^*$ dans (13), il vient :

$$\hat{z}^*(t) = \underline{z}^* + P^* F^T (F P^* F^T)^{-1} [\underline{x}(t) - F \underline{z}^*] \quad (18)$$

(18) représente donc l'estimation optimale lorsque σ est constant et que le filtre est en régime permanent.

La commande optimale, dans ce cas, est donc donnée par :

$$\hat{u}^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \hat{z}^*(t) = E \hat{z}^*(t) \quad (19)$$

D'après (17), on tire :

$$\hat{u}^*(t) = K_1 \underline{x}(t) + K_2 \sigma$$

Comme pour le régulateur quadratique, la commande appliquée dépend de façon algébrique de l'état et de la consigne, la structure du système commandé étant donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A \underline{x} + B [K_1 \underline{x} + K_2 \sigma] \\ \underline{x} &= [A + B K_1] \underline{x} + K_2 \sigma \end{aligned}$$

4,2 - Mise en oeuvre du régulateur

Pour mettre en oeuvre ce régulateur, il faut calculer au préalable P^* .

Nous avons proposé en 3 - A une méthode utilisant la matrice hamiltonienne associée à l'équation de RICCATI (12). Notons cependant que, comme dans le cas du filtrage, il est possible d'obtenir une méthode simplifiée.

En effet, posons :

$$R^* = P^*$$

Si, maintenant, nous portons dans (15), il vient :

$$(M - \alpha I)^T R^* + R^* (M - \alpha I) + D^T Q D = 0 \quad (20)$$

Cette nouvelle équation est une équation algébrique

Finalement, on opérera donc comme suit :

- Choix arbitraire des matrices T et R permettant de définir un état augmenté $\underline{z}$ et le nouveau modèle $\dot{\underline{z}} = M \underline{z}$

- Calcul du régime permanent P^* de P par résolution de l'équation algébrique (20) et inversion de R^*

- Calcul de $\underline{z}^*$, estimation optimale, lorsque la contrainte est ignorée, à l'aide de (17)
- Calcul de $\underline{\hat{z}}^*$, estimation optimale, compte tenu de la contrainte égalité, à l'aide de (18)
- La commande optimale est alors donnée par (19) en fonction de $\underline{\hat{z}}^*$.

4,3 - Un exemple élémentaire

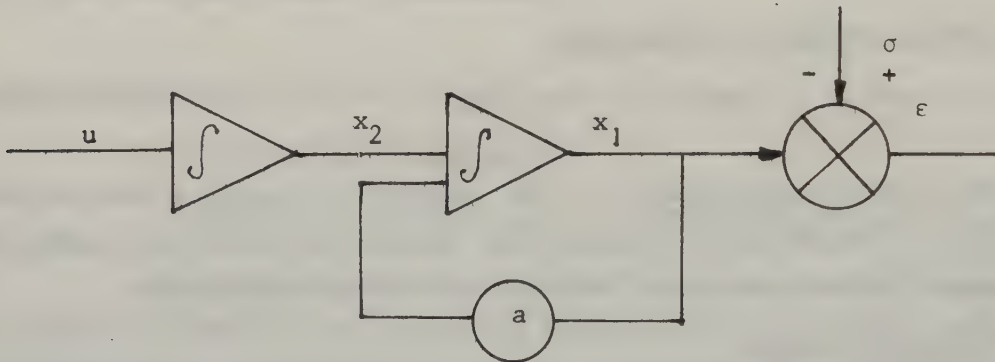
Considérons le processus représenté par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

et dont la sortie observée est le dernier état :

$$s(\tau) = x_1(\tau) = [1, 0] \underline{x}(\tau)$$

soit σ une consigne scalaire constante.



Posons :

$$\begin{aligned} u &= y \\ \dot{y} &= 0 \end{aligned}$$

Le vecteur d'état augmenté est alors :

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ soumis à l'équation différentielle :}$$

$$\dot{\underline{z}} = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{z} = \underline{M} \underline{z}$$

tandis que la sortie $s(\tau)$ peut s'écrire :

$$\underline{s}(\tau) = D \underline{z}(\tau) = [1, 0, 0] \underline{z}$$

Le problème de la recherche de la commande $\hat{u}$ est maintenant ramené à un problème de l'estimation de l'état initial $\hat{z}(t)$ qui minimise le critère :

$$J = \frac{1}{2} \int_t^{\infty} ||\underline{s} - D \underline{z}(\tau)||^2 e^{2\alpha(t-\tau)} d\tau$$

compte tenu de la contrainte :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{z} = F \underline{z}$$

Le critère étant à horizon infini, l'équation (12) admet alors une solution permanente donnée par (15) :

$$P^* (M - \alpha I)^T + (M - \alpha I) P^* + P^* D^T Q D P^* = 0 \quad (15)$$

Cherchons la solution $\underline{z}^*$ de (17), qui est la solution en régime permanent lorsque l'on ignore la contrainte.

Tout d'abord, transformons l'équation (15) en posant :

$$P^*^{-1} = R^*$$

R^* est alors solution de (20) :

$$(M - \alpha I)^T R^* + R^* (M - \alpha I) = - D^T Q D$$

Les composantes de R^* sont solutions d'un système linéaire que nous pouvons résoudre analytiquement, ce qui nous conduit à :

$$R^* = \begin{vmatrix} \frac{-1}{2(a-\alpha)} & \frac{-1}{2(a-\alpha)(a-2\alpha)^2} & \frac{1}{2(a-\alpha)(a-2\alpha)} \\ \frac{-1}{2(a-\alpha)(a-2\alpha)^2} & \frac{a-3\alpha}{4\alpha^3(a-\alpha)(a-2\alpha)^2} & \frac{a-3\alpha}{4\alpha^2(a-\alpha)(a-2\alpha)^2} \\ \frac{1}{2(a-\alpha)(a-2\alpha)} & \frac{a-3\alpha}{4\alpha^2(a-\alpha)(a-2\alpha)^2} & \frac{1}{2\alpha(a-\alpha)(a-2\alpha)} \end{vmatrix}$$

$\underline{z}^*$ solution de (17) est donné par :

$$\underline{z}^* = [M + P^* D^T Q D]^{-1} P^* D^T Q \underline{s} \quad (17)$$

que l'on peut également écrire :

$$\underline{z}^* = [M + K D]^{-1} K \underline{s}$$

en posant : $K = P^* D^T Q$

Calculons le gain K à partir de R^* :

$$R^* K = R^* P^* D^T Q = D^T Q$$

K est donc solution d'un système linéaire que l'on peut résoudre sans avoir à inverser R^* , ce qui nous conduit à :

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\alpha} \\ -\frac{2\alpha(a-2\alpha)}{a-3\alpha} \\ 2 \end{bmatrix}$$

En remplaçant K par cette expression dans (17), on tire finalement :

$$\underline{z}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{bmatrix} \sigma$$

Si, maintenant, nous tenons compte de la contrainte terminale, l'estimation optimale $\hat{z}^*$ est donnée par (18) :

$$\hat{z}^*(t) = \underline{z}^* + P^* F^T (F P^* F^T)^{-1} [\underline{x}(t) - F \underline{z}^*]$$

Là encore, nous n'inverserons pas R^* pour obtenir P^* , mais calculerons directement les solutions en Λ :

$$\Lambda = P^* F^T \text{ à partir de } R^* \Lambda = F^T$$

Finalement, nous obtenons :

$$\hat{z}^*(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{bmatrix} \sigma + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2\alpha^3}{a-3\alpha} & -\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) - \sigma \\ x_2(t) + a\sigma \end{bmatrix}$$

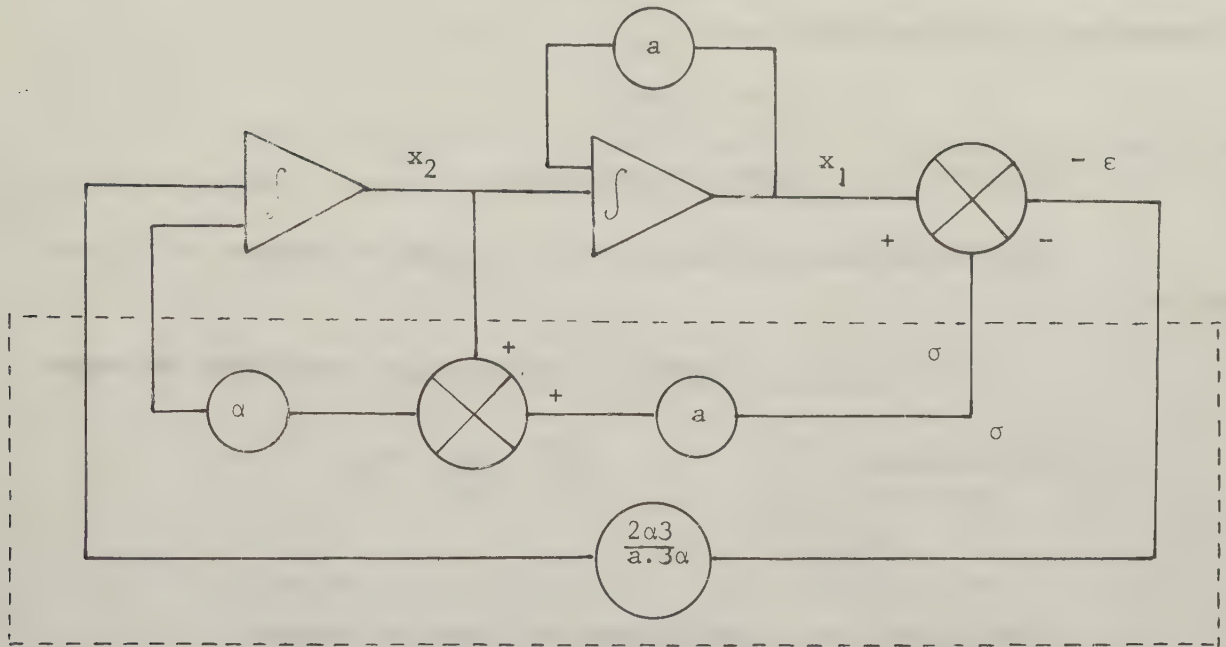
soit encore :

$$\hat{z}^*(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \frac{2\alpha^3}{a-3\alpha} (x_1(t) - \sigma) - \alpha(x_2(t) + a\sigma) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Il résulte donc que la commande optimale est donnée par :

$$u(t) = \frac{2\alpha^3}{a-3\alpha} (x_1(t) - \sigma) - \alpha(x_2(t) + a\sigma)$$

D'où la structure du système commandé :



5 - CHOIX DU COEFFICIENT α POUR LE REGULATEUR -

D'après le choix que nous avons fait de la fonction de pondération du critère, la constante α peut être prise a priori de l'ordre de l'inverse du temps de réponse désiré pour le système commandé.

Si nous notons t_d le temps de réponse à 2 % désiré, on peut donc choisir :

$$\alpha \approx \frac{1}{t_d} \quad (21)$$

Afin de préciser la validité de ce choix, nous allons maintenant étudier quelques exemples.

5,1 - Système du premier ordre

Soit donc le système décrit pour les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = a x + u \\ s = x \end{cases}$$

Le critère de performance étant :

$$J = \frac{1}{2} \int_t^{\infty} (\sigma - x)^2 e^{2\alpha(t-\tau)} d\tau$$

Posons : $u = y$ et $\dot{y} = 0$

En résolvant les équations (15), (17) et (18), on tire :

$$\hat{u} = -\alpha x (a-\alpha) \sigma$$

et l'équation du système bouclé est :

$$\dot{x} = (a-\alpha) (x-\sigma)$$

La constante de temps est donc $\frac{1}{\alpha-a}$.

Pour un système du premier ordre, le temps de réponse à 2 % est donné par :

$$t_r = \frac{4}{\lambda}, \quad \lambda \text{ étant l'inverse de la contrainte de temps.}$$

On tire donc :

$$t_r = \frac{4}{\alpha-a}$$

D'où le choix de α pour obtenir un temps de réponse à 2 % :

$$\alpha = \frac{4}{t_d} + a \quad (22)$$

5,2 - Système du second ordre

Reprenons les résultats relatifs au problème traité comme exemple en 4,2.

Pour le processus décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1 + x_2 \\ x_2 = u \end{cases} \quad \begin{matrix} s = x_1 \\ \sigma = \text{constante} \end{matrix}$$

la commande optimale est donnée par :

$$\hat{u}^* = \frac{2\alpha^3}{(a-3\alpha)} [x_1(t) - \sigma] - \alpha [x_2(t) + a\sigma]$$

Si nous portons cette valeur dans l'équation d'état, on tire :

$$\dot{x}_1 = a x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{2\alpha^3}{(a-3\alpha)} [x_1(t) - \sigma] - \alpha [x_2 + a\sigma]$$

La fonction de transfert du système bouclé est alors donnée par :

$$\frac{x_1}{\sigma} = \frac{\alpha \left[\frac{2\alpha^2}{-a+3\alpha} - a \right]}{p^2 + (\alpha-a)p + \alpha \left[\frac{2\alpha^2}{3\alpha-a} - a \right]}$$

Nous avons donc à faire à un système du second ordre, pour lequel le temps de réponse à une entrée indicielle est donné par :

$$t_r \approx \frac{4}{\xi \omega_n}$$

Soit, en remplaçant ici $\xi \omega_n$ par sa valeur :

$$t_r = \frac{4}{\frac{\alpha-a}{2}} = \frac{8}{\alpha-a}$$

Calculons la valeur de α :

$$\boxed{\alpha = \frac{8}{t_d} + a} \quad (23)$$

De la même façon, un calcul que nous développerons dans la suite montre que pour le système du second ordre à deux constantes de temps suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = b x_2 + u \end{cases}$$

$$s = x_1 \quad \sigma = \text{constante}$$

la commande optimale est donnée par :

$$\hat{u}^* = a b \sigma + \frac{\alpha(b-\alpha)(b-2\alpha)}{b+a-3\alpha} (x_1 - \sigma) - \alpha(x_2 + a\sigma)$$

ce qui conduit à la fonction de transfert du système commandé suivante :

$$\frac{X_1}{\sigma} = \frac{\frac{(b-\alpha)(a-\alpha)(b+a-2\alpha)}{(a+b-3\alpha)}}{p^2 + p(\alpha-a-b) + \frac{(b-\alpha)(a-\alpha)(a+b-2\alpha)}{a+b-3\alpha}}$$

Le temps de réponse est alors donné par :

$$t_r = \frac{4}{(\alpha-a-b)/2} = \frac{8}{\alpha-a-b}$$

Donc, pour l'ensemble des systèmes monovariabiles du second ordre, si le temps de réponse désiré pour le système commandé est "petit" devant la

somme des constantes de temps naturelles du processus, on pourra choisir :

$$\boxed{\alpha = \frac{8}{t_d}} \quad (24)$$

Cette relation n'est rigoureusement exacte que si le système du second ordre est constitué de deux intégrateurs $a = b = 0$.

Soit t_d le temps de réponse désiré

t_r le temps de réponse réel

et soit α le coefficient du critère déterminé à l'aide de (24) :

$$\alpha = \frac{8}{t_d}$$

on aura donc :

$$\alpha = \frac{8}{t_d} = \frac{8}{t_r} + a + b$$

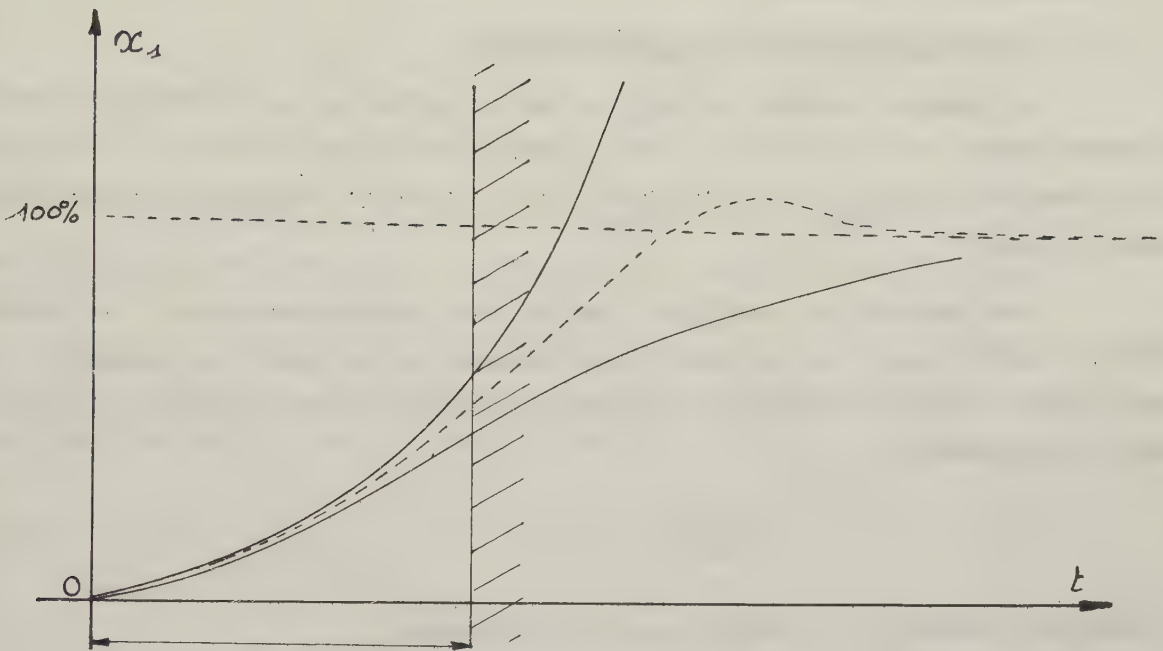
d'où l'on tire :

$$\frac{8(t_r - t_d)}{t_r} = - (a+b) t_d$$

$$\frac{t_r - t_d}{t_r} = - (a+b) \frac{t_d}{8}$$

Pour $t_d = \frac{-1}{(a+b)}$ l'erreur relative sur le temps de réponse réel est donc de 12,5 %.

Sur le pratique, on peut interpréter ce résultat en disant que l'on peut valablement utiliser (24) pour choisir α , si le temps de réponse désiré appartient à l'intervalle sur lequel on peut assimiler la réponse indicielle d'un second ordre quelconque à celle d'un double intégrateur.



domaine de validité de (24)

5,3 - Système d'ordre plus élevé

Pour les systèmes monovariabiles d'ordre plus élevé et a fortiori pour les systèmes multivariabiles, il n'est plus possible, à cause du volume de calcul engendré, d'obtenir les expressions littérales des commandes.

Comme, d'autre part, nous n'avons pas pu, comme cela avait été le cas pour le filtrage seul, trouver la relation existant entre les pôles du système bouclé et ceux du système libre, nous ne pouvons pas donner de relation exacte entre le coefficient α et le temps de réponse du système bouclé. Cependant, on peut toujours, sur un intervalle déterminé $[0, T_0]$, assimiler la réponse indicielle d'un système quelconque à celle d'un double intégrateur. Aussi, plutôt que d'utiliser la relation approchée (21) pour choisir le coefficient α du critère, nous utiliserons la relation (24) :

$$\alpha = \frac{8}{t_d}$$

valable pour un double intégrateur.

Cette approximation se justifie également en remarquant que, sur le plan pratique, on impose généralement au système commandé d'avoir des transitoires d'une durée plus brève que ceux du système en régime libre, ce qui fait que t_d a toutes chances d'appartenir à $[0, T_0]$.

6 - MISE EN OEUVRE PRATIQUE -

6,1 - Système monovariable du second ordre

Ce premier exemple de mise en oeuvre concerne un système monovariable du second ordre pour lequel nous avons obtenu, de façon littérale, l'expression de la commande optimale, et, par suite, la fonction de transfert du système en boucle fermée.

Les conclusions que l'on tire de cette expression, quant à la relation entre le coefficient α du critère de performance et le temps de réponse du système bouclé, sont à la base de la relation approchée (24) que nous utilisons dans le cas général.

$$\alpha = \frac{8}{td} \quad (24)$$

td temps de réponse à 2 % désiré par l'utilisateur.

Il s'agit donc ici d'en vérifier la validité, en reprenant le problème de base :

Soit donc le système monovariable décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = b x_2 + u \end{cases}$$

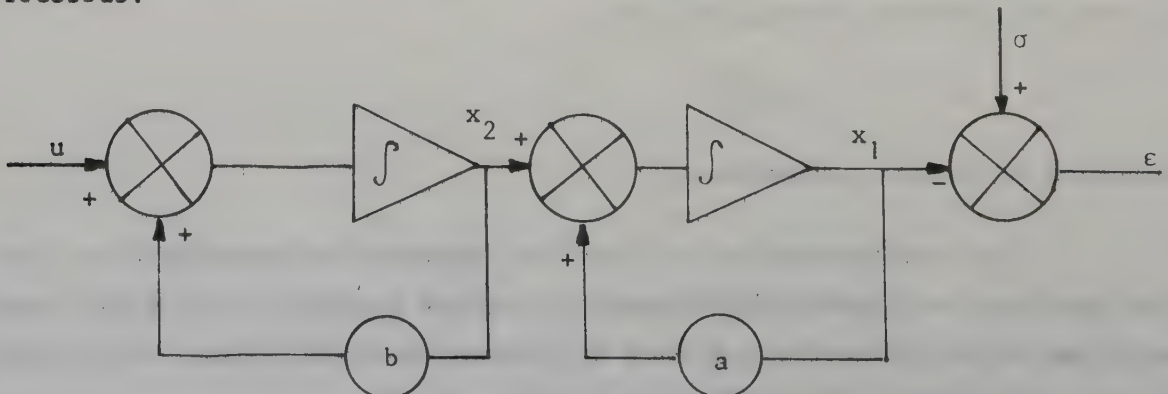
dont la sortie est $s = x_1$,

ou encore :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}$$

Soit σ une consigne constante à laquelle on veut assujettir la sortie du processus.



Le critère de performance J est pris de la forme :

$$J = \frac{1}{2} \int_t^{\infty} (\sigma - s)^2 e^{2\alpha(t-\tau)} d\tau \quad t \leq \tau \leq \infty$$

$$Q = 1$$

Pour convertir ce problème de commande en un problème d'estimation d'état initial, nous imposons à la commande u de vérifier les équations :

$$\begin{cases} u = y \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

si bien que l'on définit ainsi l'état augmenté $\underline{z}$:

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{bmatrix}$$

Cet état est soumis à l'équation différentielle :

$$\dot{\underline{z}} = M \underline{z} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{z}$$

tandis que la sortie peut s'écrire :

$$s = D \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{z}$$

Le problème de la recherche de la commande u est maintenant ramené au problème de l'estimation de l'état initial $\hat{z}^*$ qui minimise le critère :

$$J = \frac{1}{2} \int_t^{\infty} (\sigma - D \underline{z})^2 e^{2\alpha(t-\tau)} d\tau \quad t \leq \tau \leq \infty$$

compte tenu de la contrainte :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{z}^* = F \hat{z}^*$$

La solution générale est alors donnée par (18) :

$$\hat{z}^* = \underline{z}^* + P^* F^T (F P^* F^T)^{-1} [\underline{x} - F \underline{z}^*] \quad (18)$$

avec :

$$\underline{z}^* = [M + P^* D^T Q D]^{-1} P^* D^T Q \underline{\sigma} \quad (17)$$

et :

$$P^* (M - \alpha I)^T + (M - \alpha I) P^* + P^* D^T Q D P^* = 0 \quad (15)$$

ou, en posant $R^* = P^*^{-1}$:

$$(M - \alpha I)^T R^* + R^* (M - \alpha I) = - D^T Q D \quad (20)$$

(20) est une équation algébrique dont la solution est symétrique.

$$R^* = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2(a-\alpha)} & \frac{1}{2(a-\alpha)(a+b-2\alpha)} & \frac{-1}{2(a-\alpha)(a-2\alpha)(a+b-2\alpha)} \\ \frac{1}{2(a-\alpha)(a+b-2\alpha)} & \frac{-1}{2(a-\alpha)(b-\alpha)(a+b-2\alpha)} & \frac{b+a-3\alpha}{2(a-\alpha)(a-2\alpha)(b-\alpha)(b-2\alpha)} \\ \frac{-1}{2(a-\alpha)(a-2\alpha)(a+b-2\alpha)} & \frac{b+a-3\alpha}{2(a-\alpha)(a-2\alpha)(b-\alpha)(b-2\alpha)} & \frac{b+a-3\alpha}{2\alpha(a-\alpha)(a-2\alpha)(b-\alpha)(b-2\alpha)} \end{bmatrix}$$

D'où l'on tire, en portant dans (17) :

$$\underline{z}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -a \\ ab \end{bmatrix} \sigma$$

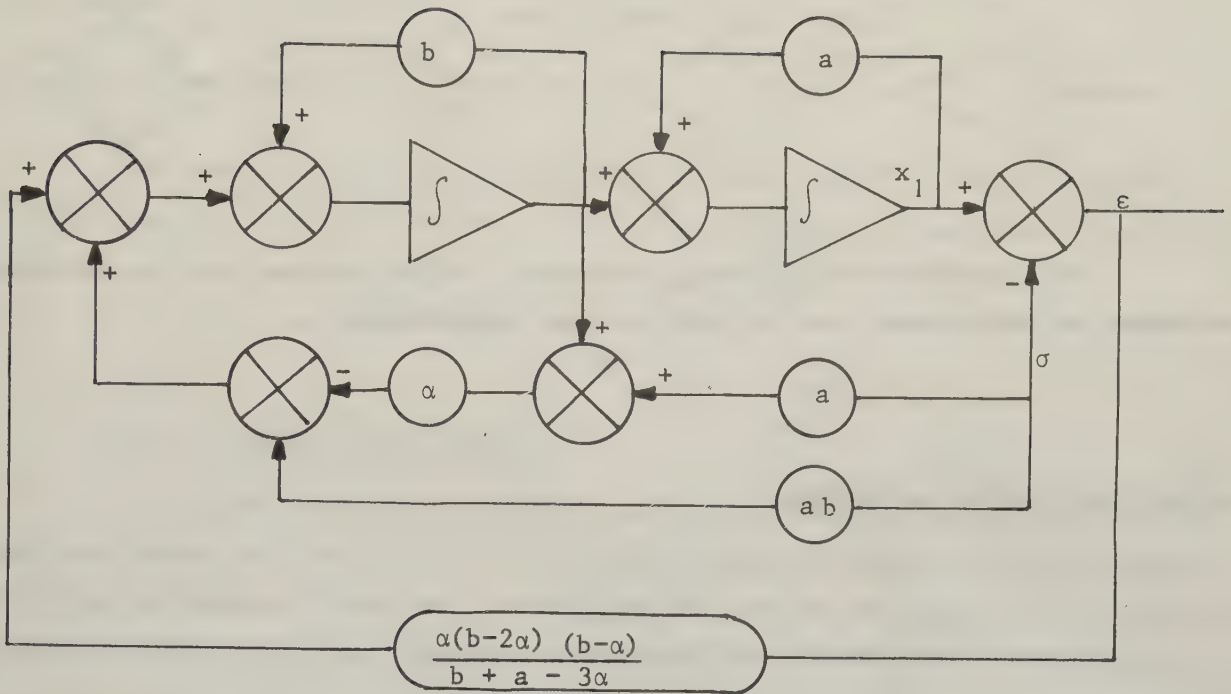
et dans (18) :

$$\underline{\hat{z}}^* = \underline{z}^* + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\alpha(b-2\alpha)(b-\alpha)}{b+a-3\alpha} & -\alpha \end{bmatrix} [\underline{x} - F \underline{z}^*]$$

Par suite :

$$\hat{y}^* = \hat{u}^* = a b \sigma + \frac{\alpha(b-2\alpha)(b-\alpha)}{b+a-3\alpha} (x_1 - \sigma) - \alpha [x_2 + a \sigma]$$

D'où la structure du système commandé :



Les exemples présentés concernent un système à deux constantes de temps naturelles, pour lequel :

$$a = \frac{-1}{20} = -0,05$$

$$b = \frac{-1}{40} = -0,025$$

Les enregistrements présentés correspondent à :

$$(1) \quad t_d = 10 \text{ s} \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{8}{t_d} = 0,8$$

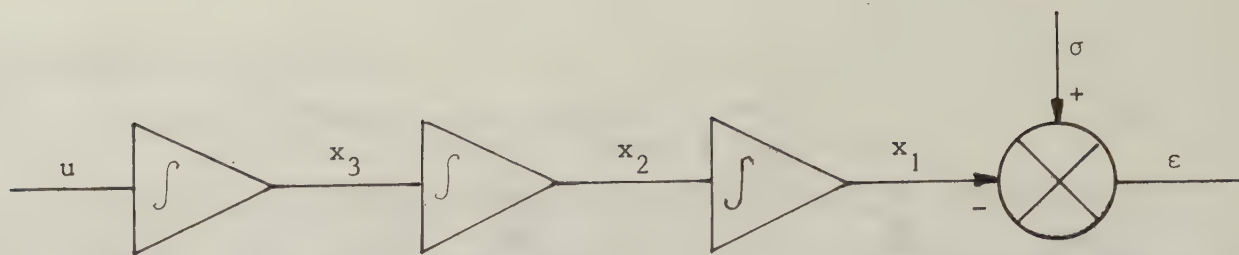
$$(2) \quad t_d = 20 \text{ s} \quad \text{d'où} \quad \alpha = 0,4$$

$$(3) \quad t_d = 50 \text{ s} \quad \text{d'où} \quad \alpha = 0,16$$

et permettent de constater que, dans tous les cas, le temps de réponse à 2 % réel est pratiquement identique au temps de réponse désiré.

6,2 - Système du 3^e ordre

Nous considérons toujours un processus monovariante, mais cette fois nous envisagerons le cas d'un système formé par 3 intégrateurs, dont la sortie est constituée par le dernier état.



Nous procédons d'une façon identique à celle adoptée pour le problème précédent en définissant tout d'abord un état supplémentaire.

$$\begin{aligned} u &= y \\ \dot{y} &= 0 \end{aligned}$$

ce qui nous conduit au système :

$$\dot{\underline{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{z} \quad \underline{z} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y \end{bmatrix}$$

L'observation est alors :

$$s = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \underline{z}$$

tandis que la matrice F, exprimant la contrainte à laquelle est soumise l'estimation, est :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En procédant comme précédemment, c'est-à-dire en résolvant successivement (20), (17) et (18), nous obtenons finalement :

$$\hat{u}^* = \frac{-4\alpha^3}{5} (x_1 - \sigma) - \frac{8\alpha^2}{5} x_2 - 2\alpha x_3$$

La fonction de transfert du système bouclé étant :

$$\frac{x_1}{\sigma} = \frac{\frac{4\alpha^3}{5}}{p^3 + 2\alpha p^2 + \frac{8\alpha^2}{5} p + \frac{4\alpha^3}{5}}$$

On peut constater sur cette fonction de transfert que les rapports caractéristiques de NASLIN sont respectivement égaux à 1,6 et 2,5 et ne dépendent pas de α . En fait, le dépassement de la réponse indicielle est pratiquement indépendant du coefficient α .

L'enregistrement proposé correspond à un temps de réponse désiré $t_d = 8 \text{ s}$, ce qui, d'après (24), nous a conduit à prendre :

$$\alpha = \frac{8}{t_d} = 1$$

En pratique, on peut estimer que le temps réel, apprécié sur la trajectoire, est de l'ordre de $8,2 \text{ s}$; ce qui correspond à une erreur relative :

$$\frac{\Delta t_d}{t_d} = \frac{0,2}{8}$$

6,3 - Système multivariable

Le système multivariable que nous présentons ici ne peut pas être considéré comme représentatif de tous les systèmes multivariables, d'une part, parce que le nombre d'états de commandes et de sorties est relativement restreint et que, d'autre part, les couplages entre les divers états sont très "laches".

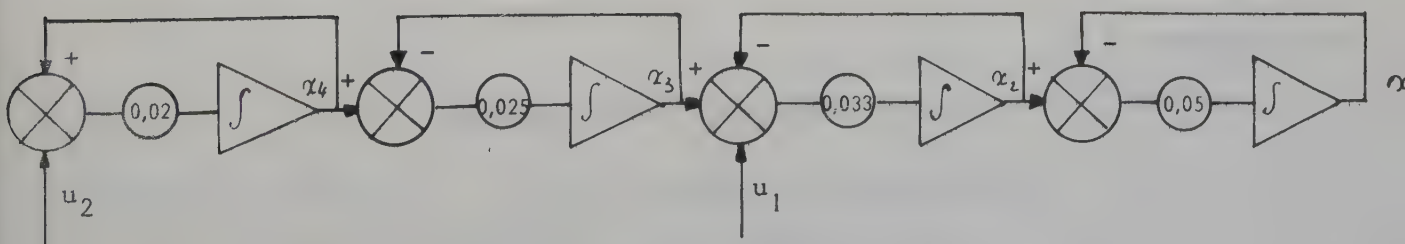
Notre choix est guidé par un souci de comparaison entre les résultats que nous obtenons, quant aux temps de réponses, avec les résultats obtenus à l'aide d'une méthode utilisant un critère quadratique [1].

Le système étudié est un système à quatre états, deux commandes et deux sorties, représenté par les équations :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,05 & 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & -0,033 & 0,033 & 0 \\ 0 & 0 & -0,025 & 0,025 \\ 0 & 0 & 0 & -0,02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,033 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}$$

et dont le schéma analogique est le suivant :



Les consignes constantes, auxquelles nous cherchons à assujettir les sorties, sont respectivement σ_1 et σ_2 .

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}$$

et le critère est pris égal à :

$$J = \frac{1}{2} \int_t^{\infty} ||\underline{\sigma} - \underline{s}||_Q^2 e^{2\alpha(t-\tau)} d\tau$$

$$t \leq \tau \leq \infty$$

La matrice de pondération entre les deux sorties est prise égale à $\mathbb{I}$;

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous calculons R^* par l'intermédiaire de (20) :

$$(M-\alpha)^T R^* + R^* (M-\alpha) = -D^T Q D$$

à l'aide d'un programme de calcul algébrique identique à ceux que l'on utilise dans la recherche de matrice de LYAPOUNOV ; puis, un programme de calcul matriciel nous fournit $\underline{z}^*$ et $\underline{\hat{z}}^*$ en résolvant (17) et (18).

Pour le problème que nous envisageons, nous avons choisi $t_d = 50$ s.

α est alors calculé à l'aide de (24) :

$$\alpha = \frac{8}{t_d} \Rightarrow \alpha = \frac{8}{50} = 0,16$$

d'où la matrice $(M-\alpha\mathbb{I})$:

$$(M-\alpha) = \begin{bmatrix} -0,21 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,193 & 0,033 & 0 & 0,033 & 0 \\ 0 & 0 & -0,185 & 0,025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,18 & 0 & 0,02 \\ -0 & 0 & 0 & 0 & -0,16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,16 \end{bmatrix}$$

et finalement :

$$\begin{aligned} -\hat{u}_1^* = \hat{y}_1^* = & \sigma_1 - \sigma_2 + 11,73 (x_1 - \sigma_1) - 4,85 (x_2 - \sigma_1) \\ & - 0,541 (x_3 - \sigma_2) - 0,029 (x_4 - \sigma_2) \end{aligned}$$

$$\hat{u}_2^* = \sigma_2 + 0,55 (x_1 - \sigma_1) + 0,13 (x_2 - \sigma_1) - 37,28 (x_3 - \sigma_2) - 8(x_4 - \sigma_2)$$

En portant $\hat{u}_1^*$ et $\hat{u}_2^*$ dans les équations du système (26), nous obtenons les équations du système bouclé :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,05 & 0,05 & 0 & 0 \\ -0,387 & -0,193 & 0,015 & 0,0009 \\ 0 & 0 & -0,025 & 0,025 \\ 0,011 & 0,003 & -0,746 & -0,18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,580 & -0,0142 \\ 0 & 0 \\ -0,014 & 0,926 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}$$

Les enregistrements que nous présentons représentent les réponses des deux sorties x_1 et x_3 lorsqu'on les assujettit à deux consignes distinctes σ_1 et σ_2 .

Le temps de réponse désiré est le même pour chacune des deux sorties et il est égal à $t_d = 50$ s.

Nous constatons sur :

$$\begin{aligned} s_1 = x_1 \quad t_r = 43,75 \quad \text{d'où} \quad \frac{t_d - t_r}{t_d} &= 0,125 \\ s_2 = x_3 \quad t_r = 43,75 \quad \text{d'où} \quad \frac{t_d - t_r}{t_d} &= 0,125 \end{aligned}$$

En pratique, les temps de réponses réels du système bouclé sont donc inférieurs au temps de réponse désiré : ce qui s'explique par le fait que nous imposons au système de répondre en 50 s, alors que ses constantes de temps sont respectivement de 20, 30, 40 et 50 s.

La relation (24) qui sert à déterminer α devient alors très approchée.

7 - CONCLUSION -

Pour un processus linéaire décrit par les équations :

$$\frac{dx}{d\tau} = A \underline{x}(\tau) + B u(\tau)$$

$$t \leq \tau$$

$$\underline{s} = C \underline{x}(\tau)$$

et muni du critère :

$$J = \frac{1}{2} \int_t^T ||\underline{s} - s(\tau)||_Q^2 e^{2\alpha(t-\tau)} d\tau$$

Les propriétés de dualité nous ont permis de convertir le problème de la recherche de la commande $\hat{u}^*(t)$, minimisant J , en un problème d'estimation d'état initial.

Pour cela, nous avons défini un état augmenté $\underline{z}(\tau)$, dans lequel entrent les grandeurs de commande, et nous avons envisagé le problème de filtrage suivant :

"Estimer l'état initial $\hat{\underline{z}}^*(t)$ tel que le critère J :

$$J = \frac{1}{2} \int_t^T ||\underline{g} - D \underline{z}(\tau)||_Q^2 e^{2\alpha(t-\tau)} d\tau$$

soit minimum, compte tenu de la contrainte :

$$\underline{x}(t) = F \hat{\underline{z}}^*(t) ,"$$

contrainte qui exprime que seules les composantes de $\hat{\underline{z}}^*(t)$ correspondant aux commandes $\underline{u}(t)$ sont manipulables.

L'approche par Immersion Invariante de ce problème de filtrage permet d'obtenir de façon directe les équations du filtre qui, lorsque T devient infini, admettent un régime permanent.

Les commandes calculées à partir de ce régime permanent conduisent à un régulateur stationnaire, dont la mise en oeuvre pratique ne nécessite au préalable que des calculs algébriques.

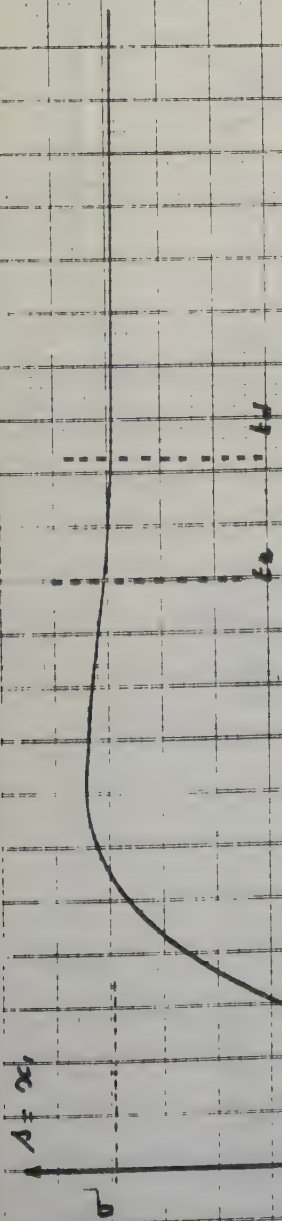
Le coefficient α , intervenant dans la fonction de pondération du critère, agit directement sur le temps de réponse du système commandé et, lorsque le temps de réponse désiré t_d est faible devant les constantes de temps naturelles $\frac{t_d}{T_i} \ll 1$, on peut valablement utiliser la relation approchée (24) :

$$\alpha = \frac{8}{t_d} \quad (24)$$

pour choisir ce coefficient.

Dans le cas général, on aura :

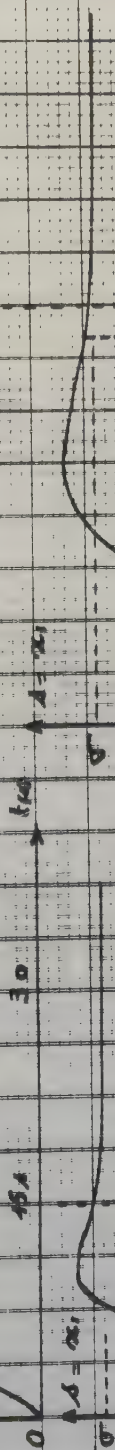
$$\frac{1}{t_d} \leq \alpha \leq \frac{8}{t_d}$$



③ $t_1 = 50s$
 $t_2 = 41.25s$

$\frac{t_1 - t_2}{t_1} \approx 17\%$

Re'ponses à un échelon de consigne
 [second ordre avec le bouclage optimal]
 $\eta_1 = 20\%$ $\eta_2 = 40\%$



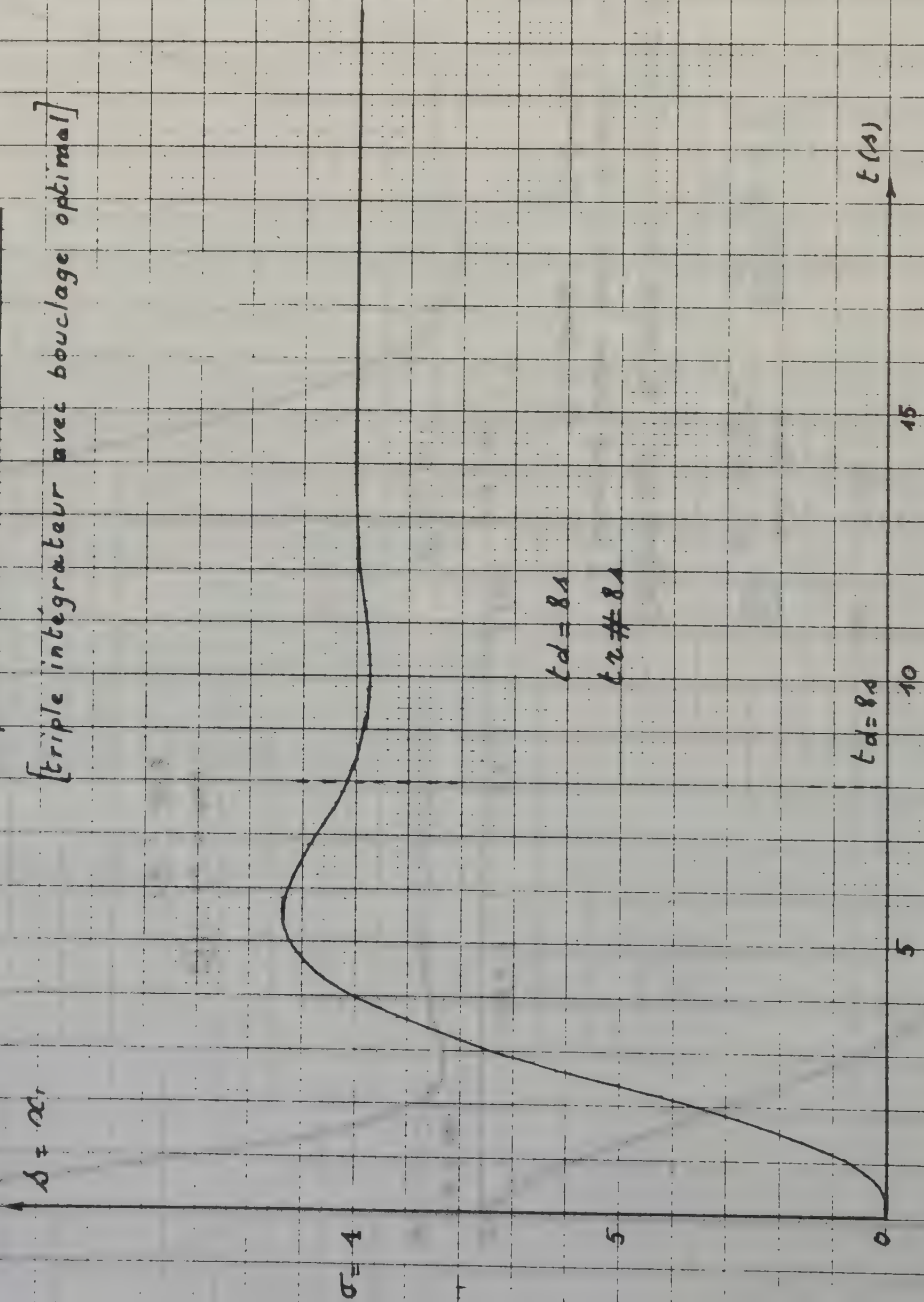
② $t_1 = 20s$
 $t_2 = 18.5s$

$\frac{t_1 - t_2}{t_1} \approx 7.5\%$

① $t_1 = 10s$
 $t_2 = 10s$

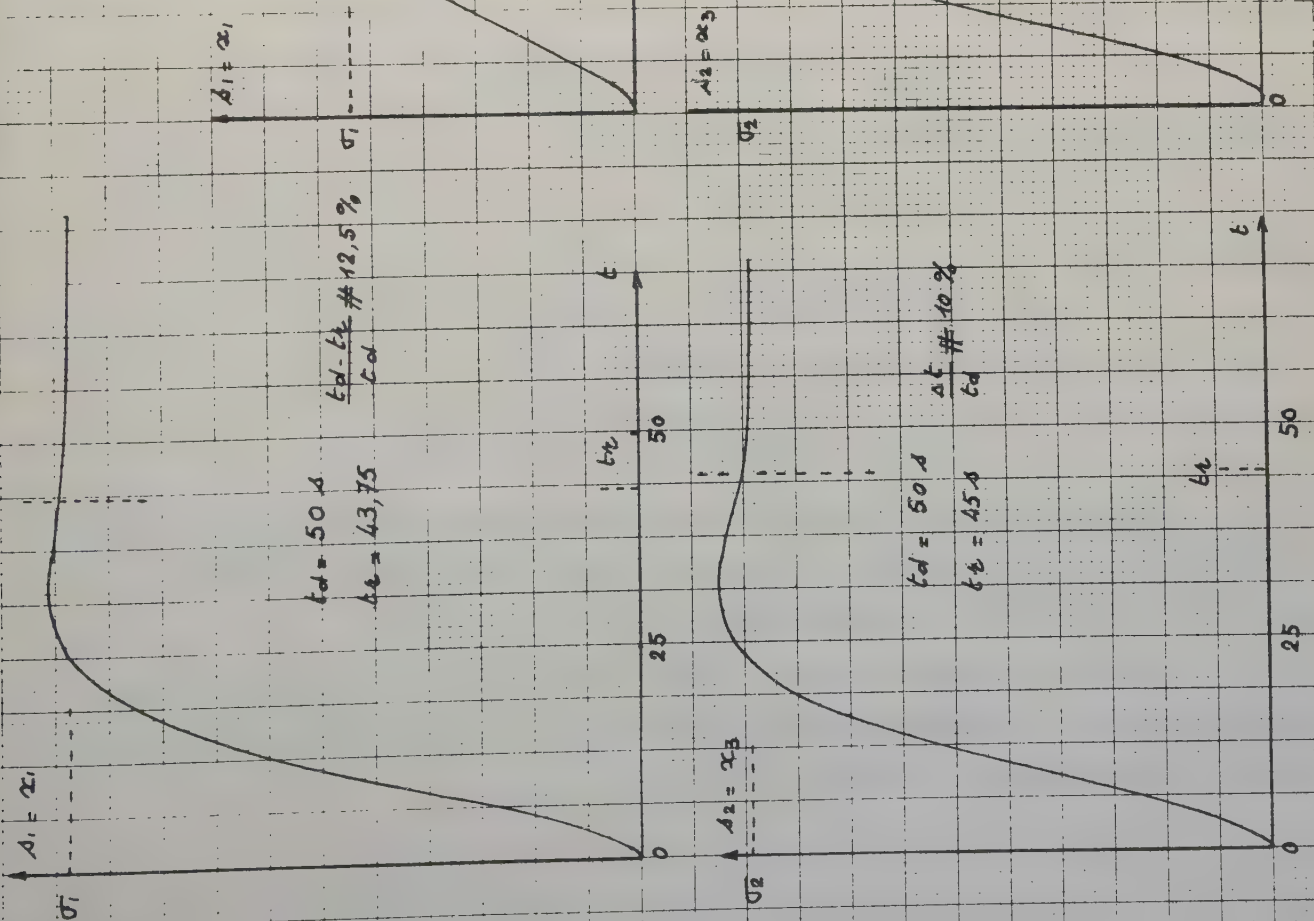


Réponse à un échelon unité
[triple intégrateur avec bouclage optimal]



SYSTEME MULTIVARIABLE

temps de réponse désiré 50 s
réel 43,75 s
erreur relative 12,5 %



C - CONCLUSION -

Par rapport aux critères de commande de filtrage classique, le critère que nous venons d'étudier ne comporte qu'un nombre limité de coefficients :

- Une matrice de pondération Q dont la signification est immédiate : ses termes traduisent l'importance relative que l'on accorde aux écarts de sortie (écarts de mesures pour le filtrage ou écarts de régulation pour la commande).

- Un coefficient α unique que l'on peut qualifier de "facteur d'horizon". Dans le cas du filtrage, ce coefficient reflète la confiance accordée aux mesures en sortie, par rapport à celle accordée au modèle.

Dans le cas de la commande, il représente l'intervalle de temps sur lequel on accorde le plus d'importance aux écarts de régulation et se trouve donc directement lié au temps de réponse désiré pour le système commandé.

Il découle de ce critère des algorithmes dont nous avons pu préciser les conditions de stabilité et démontrer la convergence vers un régime stationnaire que l'on peut déterminer à l'aide de calculs matriciels algébriques sans intégration d'équation de RICCATI.

Les équations du filtre stationnaire sont :

$$\frac{de}{dt} = A \underline{e}(t) + B \underline{u}(t) + P^* D^T Q [z(t) - D \underline{e}(t)]$$

avec P^* solution de :

$$P^{*-1} (A + \alpha I) + (A + \alpha I)^T P^{*-1} = D^T Q D$$

tandis que celles de commande sont données par :

$$\hat{u}^*(t) = [0 \mid R] \hat{z}^*(t)$$

avec :

$$\hat{z}^* = \underline{z}^* + P^* F^T (F P^* F^T)^{-1} (\underline{x} - F \underline{z}^*)$$

$$\underline{z}^* = [M + P^* D^T Q D]^{-1} P^* D^T Q \underline{\sigma}$$

$$P^{*-1} (M - \alpha I) + (M - \alpha I)^T P^{*-1} = - D^T Q D$$

Dans le cas du filtrage, le coefficient α fixe de manière directe l'emplacement des pôles du filtre stationnaire : si λ est un pôle du modèle A , $-\lambda - 2\alpha$ est le pôle correspondant du filtre.

Dans le cas de la commande, nous n'avons obtenu de relation exacte entre le temps de réponse du système commandé et le coefficient α que pour les systèmes monovariabiles du second ordre.

Néanmoins, à partir de ce résultat, nous avons pu obtenir une relation approchée valable avec une approximation inférieure à 15 %, si t_d , temps de réponse désiré, appartient à l'intervalle sur lequel on peut assimiler la réponse indicielle du système envisagé à celle d'un double intégrateur. En pratique, cela signifie que t_d doit au plus être égal à la plus grande des constantes de temps du système, ce qui constitue toutefois un cas réaliste.

Notons cependant que l'avantage constitué par un nombre restreint de coefficients dans le critère peut apparaître, pour certains problèmes multivariables, comme un inconvénient : on ne peut obtenir autant de types de réponses qu'avec le critère quadratique classique.

C O N C L U S I O N

Alors que les méthodes variationnelles classiques recherchent les propriétés particulières des solutions des problèmes qu'elles envisagent, l'Immersion Invariante au contraire présente un caractère global et synthétique : elle conduit à la solution recherchée par résolution de tout un ensemble de problèmes apparentés au problème initial.

- Dans le domaine de la commande optimale, le principal apport d'une approche par Immersion Invariante se situe sur le plan théorique. Ainsi, au cours de notre second chapitre, nous montrons qu'un problème de LAGRANGE, avec contraintes sur la commande, peut être converti directement en système différentiel à valeurs limites en un seul point, dont la résolution conduit aux trajectoires optimales en un seul balayage. La justification de ces équations est obtenue en montrant que leurs solutions s'identifient à celles du problème à valeurs limites en deux points, obtenu par application des conditions nécessaires de PONTRYAGIN. Dans le cas général, les équations de ce système de CAUCHY sont des équations différentielles aux dérivées partielles.

De ce fait, leur résolution numérique, surtout lorsque le nombre de variables indépendantes est grand, est longue et importante, et nécessite la mise en oeuvre d'algorithmes spécialisés sur de puissants calculateurs (problèmes de précision).

Cependant, dans le cadre de l'optimalisation quadratique des systèmes linéaires, nous avons pu montrer qu'en l'absence de contraintes ces équations différentielles partielles ordinaires se réduisaient en équations différentielles ordinaires. Cette importante simplification est à la base d'algorithmes d'intérêt pratique, valables pour des systèmes multivariables non contraints, ou des systèmes monovariables avec butée sur la commande et capables de fournir à l'utilisateur une visualisation des performances qu'il peut attendre ou un catalogue de réponses indicielles en fonction des coefficients du critère.

- Dans le cadre du filtrage optimal, on peut dire que l'Immersion Invariante est à la base d'une théorie simplifiée de l'estimation, en ce sens qu'elle ne fait appel à aucune mathématique sophistiquée et qu'elle ne nécessite pas de connaissances d'ordre statistique sur les bruits et perturbations affectant le processus étudié.

Après avoir montré tout l'intérêt pratique que recèle l'Immersion Invariante, en même temps que ses limites sur le plan des algorithmes numériques, nous avons traité par ce procédé, en deuxième partie, un nouveau critère quadratique de filtrage et de régulation qui présente un intérêt pratique fondamental :

celui de posséder des coefficients de pondération ayant un sens physique :

- une matrice de pondération des écarts de sortie, dont la signification est immédiate,
- un coefficient α , qui, dans le cas du filtrage, reflète la confiance accordée aux mesures en sortie par rapport à celle accordée au modèle, et qui, dans le cas de la commande, représente l'intervalle sur lequel on accorde le plus d'importance aux écarts de régulation se trouvant par là même directement liés au temps de réponse désiré pour le système commandé.

Les algorithmes de filtrage ont été obtenus par une approche directe du problème par Immersion Invariante, tandis que les algorithmes de commande ont été obtenus à partir des précédents, en utilisant les propriétés de dualité entre les deux problèmes.

Les principales caractéristiques du critère étudié sont de conduire à un filtre (ou un régulateur) stationnaire :

- dont la stabilité asymptotique est assurée par un choix judicieux du coefficient α ,
- dont la mise en oeuvre ne nécessite que des calculs matriciels algébriques, sans qu'il soit nécessaire d'effectuer d'intégration d'équation de RICCATI.

BIBLIOGRAPHIE

- LEE E.S. - "Quasilinearization and Invariant Imbedding"
Academic Press 1968
- BELLMAN R., KALABA R., WING G.M. - "Invariant Imbedding and the reduction of two-point boundary value problems to initial value problems"
Proc. Natl. Acad. Sci. US 46.1646 (1960)
- BELLMAN R., KALABA R. - "Dynamic programming, Invariant Imbedding and quasilinearization, comparison and interconnections"
RM-4038-PR RAND Corp - SANTA MONICA, CALIFORNIA, March, 1964
- KAGIWADA H., KALABA R. - "Optimal trajectories for quadratic variational processes via Invariant Imbedding"
RM-5929-PR RAND Corp - SANTA MONICA, February, 1969
- KALABA R., SRIDHAR R. - "Invariant Imbedding and the simplest problem in the calculus of variations"
Journal of mathematical analysis and applications 30, 79-85 (1970)
- KALABA R., SRIDHAR R. - "Invariant Imbedding and optimal control theory"
RAND Corp RM-5917-PR, March 1969
- KAGIWADA H., KALABA R., THOMAS Y. - "Exact solution of PONTYAGIN'S equations of optimal control"
Journal of optimization theory and applications, vol.5 n°1, January 1970
- BELLMAN R., KAGIWADA H., KALABA R., SRIDHAR R. - "Invariant Imbedding and non linear filtering theory"
RM-4374-PR RAND Corp., December 1964
- KAGIWADA, KALABA, SCHUMITZKY, SRIDHAR - "Invariant Imbedding and sequential interpolating filters for non linear processes"
Journal of Basic Engineering, June (1969)
- D. SARLAT, Y. THOMAS - "Obtention à l'aide de l'Invariant Imbedding d'une commande optimale contrainte"
Annales E.N.S.M., premier semestre 1970
- GANTMACHER - "Théorie des matrices"
- KALMAN R.E., FAURRE P. - "Filtrage statistique"
Centre d'Automatique de l'Ecole Supérieure des Mines de PARIS, mai 1968
- MARTENSSON - "On the matrix RICCATI equation"
Informa. Scient. 3-1-(17-49) (1971)
- DE LARMINAT Ph. - "Filtrage et commande optimale selon un critère à horizon fuyant" Annales ENSM 1971 2^e sem

